

ZERFALL RADIOAKTIVER KERNE
IN INTENSIVEN STRAHLUNGSFELDERN

Dissertation

der

Fakultät für Physik
Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von

Rainer Rudolf Schlicher
aus Saarbrücken

München, 1. September 1985

ZERFALL RADIOAKTIVER KERNE
IN INTENSIVEN STRAHLUNGSFELDERN

Dissertation

der

Fakultät für Physik
Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von

Rainer Rudolf Schlicher
aus Saarbrücken

München, 1. September 1984

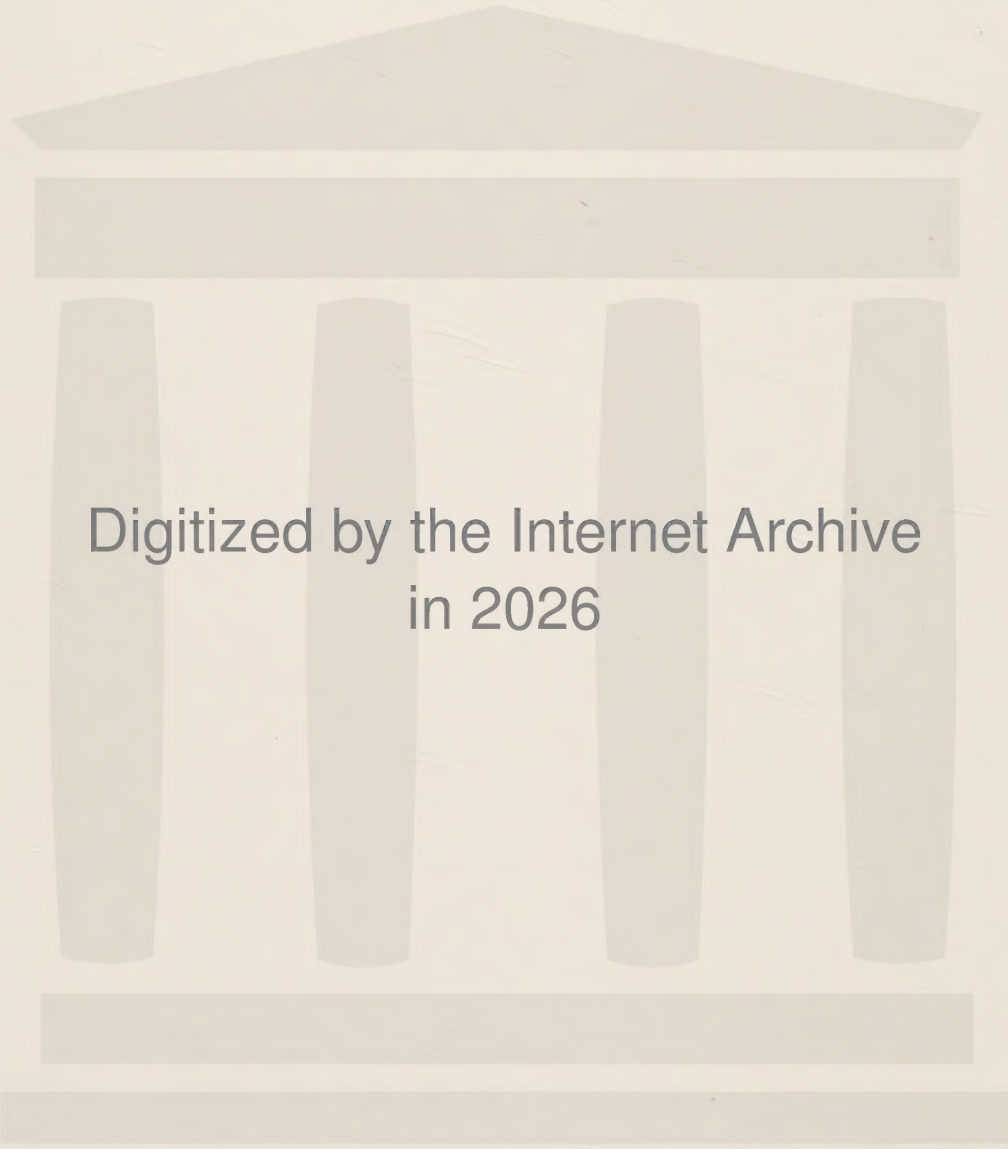
1. Gutachter: Prof. Dr. H.H. Wolter

2. Gutachter: Prof. Dr. H. Walther

auswärtiger Gutachter: Prof. Dr. M.O. Scully

Tag der mündlichen Prüfung: 8. März 1985

Meinen Eltern gewidmet,
die durch die jahrelange
Unterstützung meines Studiums
diese Dissertation erst ermöglichen.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555215_0040

Abstract

The influence of intense electromagnetic fields on the decay of radioactive nuclei, an area which has recently received much attention, is examined in this thesis. In particular, the possibility of shortening nuclear lifetimes is of special interest, as it could lead to important applications (e.g. in the problem of nuclear waste).

Different nuclear decay modes such as beta decay, gamma decay and electron capture in external fields of different frequencies (radio-, laser-, x-ray- and gamma-fields) are dealt with in this work. The emphasis is on "low-frequency" fields (e.g. photon energy $\ll$ nuclear transition energy) since at present only these fields can be produced with sufficient intensity in the laboratory. The most favorable decay mode in a low-frequency field is nuclear beta decay, since the emitted electron is influenced.

In the first part of this paper we therefore examine allowed and forbidden beta decay in a low-frequency field, whereby only the interaction between the field and the emitted electron is taken into account. The theory is developed within the Furry picture, meaning the electron is described by the Volkov wavefunction. Although the nucleus is not affected by the field, the gauge of its wavefunction plays an important role. It is therefore necessary to discuss the connection between the $\vec{E} \cdot \vec{r}$ and the $\vec{p} \cdot \vec{A}$ form of the electromagnetic interaction.

Field effects on nuclear beta decay can be divided into classical and quantum mechanical regimes. Field contributions are called "classical" if they are independent of $\hbar$. Physically speaking, the classical contributions are due to the classical interaction between the emitted electron and the external radiation field after the decay. They are therefore independent of the weak interaction. The classical description holds as long as (1) the field strength E_0 is small compared to $(Q/mc^2)^{3/2}E_c$ and $(\lambda_c/R)(\Delta E/mc^2)E_c$ and (2) the photon energy $\hbar\omega$ is small compared to Q and ΔE ($E_c = m^2c^3/e\hbar = 1.3 \times 10^{16}$ V/cm critical field strength of the electron, Q = released decay energy, ΔE = nuclear excitation energy, R = nuclear radius, $\lambda_c = \hbar/mc$ Compton wavelength of the electron). These conditions are well satisfied for presently available low-frequency fields.

In the classical regime the differential and total decay rates are calculated in the relativistic theory. Classical effects are determined by the interaction parameter $\nu = eE_0/m\omega c$. The energy and angular distributions of the emitted electrons exhibit large field effects for $\nu \gtrsim 1$. The electrons can absorb energy in the MeV-range from the field. Outside the field one obtains for $\nu \gg 1$ a narrow beam of electrons with a large energy spread, rotating with the field frequency around the wave vector of the field. However, the nuclear lifetime is not affected in the classical regime. The general theorem is proven, that in the classical regime the total rate of a decay process or the total cross section of a scattering process is not affected by an external field, as long as only charged particles in the final state are influenced by the field.

In the next step, we go beyond the classical limit and explicitly calculate the QED-corrections to the total decay rate. These calculations can be carried out in the nonrelativistic approximation, since relativistic corrections are shown to be small. In this limit the field contributions to the total decay rate can be calculated to any order. They can be expressed by an operator which acts on the field-free rate. Under the two above-mentioned conditions for the classical regime the total decay rate can be expressed by a rapidly converging perturbation series with respect to the external field. Consequently, only photon processes of very low order contribute to the total decay rate. A beta decay forbidden to ℓ -th order exhibits two field effects: the lifetime can be modified by an increase of the phase space as well as by a change of the selection rules. Besides quantum corrections to the ℓ -th order, contributions of the orders $(\ell-1)$, $(\ell-2)$, ..., 0 are also admixed to the decay. Both effects are of the order $(mc^2/Q)^3 (E_0/E_c)^2$ in a low-frequency field. Thus, the change of nuclear lifetimes in presently available fields is much too small for an experimental verification.

Several earlier publications which come to the opposite conclusion are discussed in detail. It is shown that these conclusions are based on wrong assumptions or unjustified approximations.

In the second part of this thesis the interaction between the field and the nucleus is dealt with. This interaction can in principle affect any nuclear decay mode. In particular, the photo-induced gamma decay, beta decay and electron capture are discussed. We first concentrate on one-photon-processes, both in a low-frequency ($\hbar\omega \ll \Delta E$) and in a quasi-resonant ($\hbar\omega \approx \Delta E$) field.

For non-resonant processes we obtain a generalization of the Breit-Wigner formula. A proposal from the literature for photo-induced gamma decay is critically investigated. The photo-induced electron capture offers an interesting possibility for a precise determination of the neutrino rest mass.

The field-nucleus-interaction has the same effect on the lifetime as the interaction between the field and emitted charged particles: in a low-frequency field both interactions only result in a modification of the total decay rate if the field strength is comparable to the critical one. Otherwise, the nuclear lifetime can only be influenced by fields whose photon energy is comparable to a nuclear transition energy or the released decay energy. For both interactions the enhancement of the total decay rate can be due to an enlarged phase space as well as a modification of the vacuum selection rules.

As an application of future nuclear laser systems, the saturation of nuclear transitions by an external field is examined. If an excited nuclear level, which decays much faster to the final state than the initial state, exists, and if this two-level-system (consisting of the initial and the excited state) can be saturated, the nucleus decays with half the rate of the excited state. The field parameters necessary for the saturation of a nuclear transition are calculated.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I	Einleitung	1
1.1	Motivation und Gliederung der Arbeit	1
1.2	Teilchenzerfälle in intensiven Feldern	13
1.3	Laser in der Kernphysik	18
Kapitel II	Wechselwirkung mit einem intensiven langwelligen Feld	22
2.1	Eichungen	23
2.2	Nichtwechselwirkende Zustände	26
2.3	Atomkern im äußeren Feld	36
2.4	Näherungsmethoden für gebundene Zustände im äußeren Feld	39
2.5	Ungebundene geladene Teilchen im äußeren Feld	45
2.6	Keldysh-Näherung	57
Kapitel III	Klassische Effekte in einem langwelligen Feld; Erlaubter Betazerfall	59
3.1	Übergangswahrscheinlichkeit	60
3.2	Quasiklassische Näherung für die Elektron-Feld-Wechselwirkung	68
3.3	Alternative Ableitung der quasiklassischen Übergangsrate	76
3.4	Klassische Elektron-Feld-Wechselwirkung	80
3.5	Verteilung der emittierten Elektronen	85
3.6	Totale Zerfallsrate	96
3.7	Quanteneffekte	99

Kapitel IV	Quanteneffekte in einem langwelligen Feld; Verbotener Betazerfall	103
4.1	Nichtrelativistische Theorie des verbotenen Betazerfalls im Vakuum	106
4.2	Verbotener Betazerfall im äußeren Feld	113
4.3	Verbotener Betazerfall in einem zirkular polarisierten Feld	118
4.4	Quantenkorrekturen zu erlaubtem und in erster Ordnung verbotenen Zerfall	124
4.5	Vergleich mit anderen Arbeiten	130
Kapitel V	Ein Theorem für Zerfalls- und Streuprozesse in langwelligen Feldern	140
5.1	Ein Theorem für totale Zerfallsraten und Wirkungsquerschnitte	140
5.2	Anwendung auf erlaubten nuklearen Betazerfall	150
5.3	Anwendung auf verbotenen nuklearen Betazerfall	152
Kapitel VI	Zerfallsprozesse aufgrund der Kern-Feld- Wechselwirkung; Störungstheorie	156
6.1	Zweite Ordnung Störungstheorie	158
6.2	Zerfallsdämpfung, Breit-Wigner-Wirkungsquerschnitt	168
6.3	Gammazerfall	172
6.4	Betazerfall	178
6.5	Elektroneneinfang, Bestimmung der Neutrinomasse	180

Kapitel VII Zerfallsprozesse aufgrund der Kern-Feld-Wechselwirkung; Sättigungsbereich	189
7.1 Zerfallsraten	189
7.2 Starkfeld-Näherung	193
7.3 Zerfallsdämpfung	195
7.4 Beispiele	198
 Kapitel VIII Schlußfolgerungen und Ausblick	 201
 Anhang Besselfunktionen großer Argumente	 207
 Literaturverzeichnis	 210

Kapitel I

Einleitung

1.1 Motivation und Gliederung der Arbeit

Die Zerfallskonstanten radioaktiver Atomkerne werden im allgemeinen als Naturkonstanten betrachtet, da sie sich auf der Erde durch keinerlei äußere Einwirkungen meßbar beeinflussen lassen. Bald nach der Entdeckung des exponentiellen Zerfallsgesetzes für natürliche Radioaktivität wurden die verschiedensten Experimente unternommen, um die Konstanz der Zerfallsrate zu überprüfen /1/. Dazu wurden diverse alpha- und beta-zerfallende Präparate unterschiedlichen äußeren Einflüssen ausgesetzt. So wurde die Konzentration des radioaktiven Materials variiert, um zu sehen, ob sich die Zerfallsprozesse gegenseitig beeinflussen. Weiterhin wurde die chemische Zusammensetzung geändert; radioaktive Präparate wurden unter hohen Druck von bis zu 200 atm gesetzt und auf Zentrifugen montiert; der Einfluß extremer Temperaturen wurde von 24°K bis 1300°K untersucht; die Aktivität radioaktiver Präparate wurde an verschiedenen Orten auf der Erde vermessen; sie wurden auf die Gipfel hoher Berge und in Minen tief unter der Erdoberfläche gebracht, um den Einfluß der Sonne sowie der kosmischen Strahlung zu untersuchen; radioaktive Präparate wurden Röntgen- und Gammastrahlung ausgesetzt, mit Alphateilchen und Elektronen bestrahlt, in starke Magnetfelder von bis zu 83000 G und in elektrische Entladungen gesetzt; schließlich wurden sie gar in Bomben eingeschlossen, bei deren Explosion Temperaturen von 2500°C und Drucke von 1000 atm entstanden. Das Ergebnis all dieser Experimente war negativ: Es konnte keine Änderung in der Aktivität beobachtet werden. Die Zerfallskonstante und damit die Lebensdauer eines radioaktiven Elements schien unabhängig zu sein von den physikalischen und chemischen Bedingungen außerhalb des Kerns.

Erst mit dem besseren theoretischen Verständnis der unterschiedlichen Zerfallsprozesse in radioaktiven Präparaten konnten gezielt Experimente vorgeschlagen werden, mit denen im Labor die Lebensdauer von Kernzerfällen geändert werden kann. Hierfür kommen in erster Linie die beiden Zerfallsmoden Elektroneneinfang und innere Elektronen-Konversion in Frage, bei denen die Lebensdauer des Kerns von der Dichte der atomaren Elektronen am Kernort abhängt. Im Jahre 1947 schlugen Segrè /2/ und Daudel /3/ vor, durch chemische Änderungen in einem Präparat, das durch

Elektroneneinfang zerfällt, die Elektronendichte zu beeinflussen. In den darauf folgenden Experimenten wurden aufgrund der veränderten chemischen Bindung der Valenzelektronen Änderungen in der Lebensdauer von ^7Be , das durch K-Einfang zerfällt, in der Größenordnung von 0.1 % gefunden /4/. Für Kerne, die durch innere Elektronen-Konversion zerfallen, wurden chemische Effekte auf die Lebensdauer 1953 von Bainbridge, Goldhaber und Wilson nachgewiesen /5/. Die Zerfallsrate des isomeren Zustandes $^{99\text{m}}\text{Tc}$ (2.2 keV, 6 h) wurde um 0.3 % geändert. Dieses Experiment diente als Beweis dafür, daß die innere Konversion kein Zwei-Stufen-Prozeß ist, bei dem der isomere Kern unter Gammastrahlung zerfällt und das Photon anschließend von einem Hüllenelektron absorbiert wird, sondern daß die Anregungsenergie des Kerns strahlungslos direkt an das Elektron abgegeben wird. Inzwischen ist es möglich, die Zerfallsrate bei Elektroneneinfang und innerer Konversion nicht nur durch Änderung der chemischen Umgebung zu beeinflussen, sondern auch durch Anwendung extrem hoher Drucke, wodurch die Elektronen-Wellenfunktionen zusammengedrückt werden; durch Ausnutzung der starken inneren Felder in ferromagnetischen und -elektrischen Materialien, in die die radioaktiven Atome implantiert werden; durch die Verwendung supraleitender Medien und durch die Anregung oder Ionisation der radioaktiven Atome in einem Plasma. Die größte bisher erzielte Änderung einer Zerfallskonstante wurde von Cooper et al. mit etwa 4 % am $^{90\text{m}}\text{Nb}$ gemessen /6/. Die unterschiedlichen Aktivitäten auf diesem Gebiet sind in einem Übersichtsartikel von Emery zusammengefaßt /7/. Ein weiterer nuklearer Zerfallsprozeß, der an den Zustand der Atomhülle gekoppelt ist, ist der sog. gebundene Betazerfall, bei dem das Elektron nicht ins Kontinuum emittiert, sondern in einem gebundenen atomaren Zustand erzeugt wird /8/.

Bei allen anderen nuklearen Zerfallsmoden, die nicht in dieser direkten Form von der Elektronenkonfiguration in der Atomhülle abhängen, erschien es praktisch unmöglich, die Lebensdauer mit im Labor verfügbaren Methoden zu beeinflussen /9/. Änderungen in der Rate solcher Zerfallsprozesse wurden daher bisher nur in der Astrophysik diskutiert. Wir wollen hier nur diejenigen Arbeiten erwähnen, die sich mit dem nuklearen Betazerfall beschäftigen, da sich in der hier vorliegenden Arbeit die meisten Rechnungen auf den Betazerfall beziehen werden. Cameron /10/ untersuchte nuklearen Betazerfall für statistisches Gleichgewicht im Inneren von Sternen, wobei die verschiedenen Kernniveaus thermisch besetzt sind. Shaw et al. /11/ be-

rechneten den Einfluß der Ein-Photon-Absorption durch das emittierte Elektron aus dem Planck'schen Spektrum eines Sterns. Diese beiden Effekte spielen erst bei Temperaturen in der Größenordnung von 10^8 K eine Rolle. Ferner wurden der Betazerfall freier Protonen /12/ und Neutronen /13, 14/ in einem starken konstanten Magnetfeld behandelt. Dabei zeigte sich, daß die totale Zerfallsrate eines ruhenden Teilchens nur dann durch ein konstantes äußeres Feld merklich beeinflußt werden kann, wenn dessen Stärke mit dem kritischen Magnetfeld für Elektronen $B_c = m^2 c^2 / e \hbar = 4.4 \times 10^{13}$ G vergleichbar wird. Konstante Magnetfelder dieser Stärke existieren in Neutronensternen. Die kritische Feldstärke ist ein Quantenparameter ($B_c \rightarrow \infty$ für $\hbar \rightarrow 0$), der die Grenze für die Anwendbarkeit der klassischen Elektrodynamik angibt. Für stärkere Felder dominieren die Quanteneffekte /15/.

Die Hoffnung, Änderungen der Zerfallsrate auch im Labor zu beobachten, kam erstmals auf mit der Entwicklung von Lasern und der sich daraus ergebenden Möglichkeit, Felder sehr hoher Intensität zu erzeugen. Bei der Wechselwirkung zwischen einer elektromagnetischen Welle und einem freien geladenen Teilchen mit Masse M und Ladung e tritt immer das Verhältnis zwischen dem durch das Feld bedingten Anteil $e\vec{A}$ des kinetischen Impulses $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}$ im Feld und der relativistischen Impulseinheit Mc auf /16/

$$\chi = \frac{eA_0}{Mc} = \frac{eE_0}{M\omega c} = \frac{Mc^2}{\hbar\omega} \frac{E_0}{E_c} = \frac{\lambda}{\lambda_c} \frac{E_0}{E_c} \quad (1.1)$$

Dabei ist für eine ebene Welle mit Amplitude E_0 , Frequenz ω und Wellenlänge λ die Amplitude des zugehörigen Vektorpotentials durch $A_0 = E_0/\omega$ gegeben. Mit $\lambda_c = h/Mc$ ist die Compton-Wellenlänge des Teilchens bezeichnet ($\lambda_c = 2.4 \times 10^{-10}$ cm für ein Elektron). Ferner ist die dem kritischen Magnetfeld B_c entsprechende kritische elektrische Feldstärke E_c definiert durch

$$E_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r_0 \lambda_c} = \frac{M^2 c^3}{e \hbar} \quad (1.2)$$

Für ein Elektron beträgt sie $E_c = 1.3 \times 10^{16}$ V/cm. Die Größe $r_0 = (1/4\pi\epsilon_0) (e^2/Mc^2)$ bezeichnet hier den klassischen Teilchenradius (klassischer Elektronenradius: $r_0 = 2.8 \times 10^{-13}$ cm). In Ref. 16 werden Spekulationen angestellt, mit Hilfe der Größen Compton-Wellenlänge λ_c , klassischer Elektronenradius r_0 und Wellenlänge λ des Feldes (Laser im sichtbaren Bereich: $\lambda \sim 5 \times 10^{-5}$ cm) neben der Größe ν (1.1) weitere dimensionslose Feldparameter zu konstruieren. Als entscheidender Parameter für den Einfluß einer elektromagnetischen Welle auf die Bewegung eines freien Teilchens wurde jedoch die Größe ν (1.1) identifiziert. Um merkbare Feldeffekte zu erzielen, muß ν in der Größenordnung von Eins liegen. Dieser Parameter ist proportional zu λE_0 , d.h. bei längerwelligen Feldern reichen niedrigere Intensitäten aus, um den gleichen Wert von ν zu erhalten. Im Grenzfall statischer Felder ($\lambda \rightarrow \infty$) kann man also bereits mit sehr niedrigen Feldstärken den Zustand eines freien Elektrons beeinflussen (vgl. Ablenkung der Bahn eines freien geladenen Teilchens in einem statischen Feld). Dagegen ist aus der klassischen Elektrodynamik wohl bekannt, daß ein geladenes freies Teilchen, das das räumlich begrenzte Feld einer quasiebenen Welle (z.B. Laserfeld) durchläuft, nach Passieren des Feldes wieder dieselbe Energie und denselben Impuls hat wie vor dem Eindringen in das Feld. Für praktische Rechnungen ist es nützlich, ν durch die Intensität I und die Wellenlänge λ des Feldes auszudrücken

$$\nu^2 = \frac{e^2 \lambda^2 I}{2\pi^2 \epsilon_0 m^2 c^5} = 7.3 \cdot 10^{-19} \left(\frac{m}{M}\right)^2 \lambda^2 [\mu m^2] I \left[\frac{W}{cm^2}\right],$$

wobei m die Elektronenmasse bezeichnet, oder durch die Photonendichte ρ und die Wellenlänge:

$$\nu^2 = \frac{e^2 \hbar \lambda \rho}{\pi \epsilon_0 m^2 c^3} = 4.3 \cdot 10^{-27} \left(\frac{m}{M}\right)^2 \lambda [\mu m] \rho [cm^{-3}].$$

Eine elektromagnetische Welle ist charakterisiert durch ihre Intensität, die durch die dimensionslose Größe E_0/E_C beschrieben werden soll, und durch ihre Wellenlänge, an deren Stelle wir den dimensionslosen Wechselwirkungsparameter $\nu = (\lambda/\lambda_C)(E_0/E_C)$ verwenden wollen. Gegenwärtig ist es technisch möglich, im Labor elektromagnetische Wellen zu erzeugen, für die ν für Elektronen im Bereich $\nu \sim 1$ liegt. So kann man im Puls eines Nd:Glas-Lasers ($\lambda = 1.06 \mu\text{m}$) kurzfristig Leistungen im TW-Bereich erzielen. Bei Fokussierung des Strahls auf etwa 10 Wellenlängen Durchmesser entspricht dies einer Strahlintensität von 10^{18} W/cm^2 . In diesem Fall beträgt der Feldparameter $\nu \sim 0.9$. Die Feldstärke, die mit solch einem Hochleistungslaser erzielt werden kann, ist immer noch sehr klein im Vergleich zur kritischen Feldstärke. Im vorliegenden Beispiel beträgt sie $E_0 \sim 3 \times 10^{10} \text{ V/cm}$, d.h. $E_0/E_C \sim 2 \times 10^{-6}$. Bei längerwelligen Feldern reichen niedrigere Intensitäten aus, um $\nu \sim 1$ zu erzielen. Wir werden daher gelegentlich zum Vergleich ein konventionelles Radiofeld im MHz-Bereich ($\omega/2\pi \sim 10^6 \text{ s}^{-1}$, $\lambda \sim 300 \text{ m}$) heranziehen. In Radiostationen werden Felder von bis zu $E_0 = 10^4 \text{ V/cm}$ erzeugt. Der entsprechende Wechselwirkungsparameter ν liegt für Elektronen bei $\nu \sim 96$, das Feldstärken-Verhältnis jedoch nur bei $E_0/E_C \sim 7 \times 10^{-13}$.

Selbst für die intensivsten Laserfelder mit $E_0 \sim 10^{10} \text{ V/cm}$ ist die Feldstärke noch sehr klein im Vergleich zum Coulombfeld des Kerns, dessen Stärke am Kernrand größenordnungsmäßig 10^{19} V/cm beträgt. Da sich mit Photonen im eV-Bereich keine Kernübergänge resonant anregen lassen, wird sich der Kernzustand mit Laserfeldern kaum beeinflussen lassen. Da Laserfelder jedoch im Vergleich zu den Dimensionen eines Atomkerns unendlich ausgedehnt sind, können die Zustände geladener Teilchen, die in einem Kernzerfall emittiert werden, geändert werden. Die Stärke der Kopplung zwischen äußerem Feld und freien Teilchen ist durch den Wechselwirkungsparameter ν bestimmt. Aus Gl. (1.1) ist ersichtlich, daß die Zustände leichter Teilchen stärker durch ein äußeres Feld beeinflußt werden als die schwerer Teilchen. Daher ist der nukleare Betazerfall der Zerfallsprozeß, bei dem die größten Effekte durch ein äußeres Laserfeld zu erwarten sind.

Es gibt zwei anschauliche Argumente, warum man mit einem Laserfeld den nuklearen Betazerfall merklich modifizieren kann, obwohl nur das emittierte Elektron oder Positron mit dem äußeren Feld wechselwirkt,

während das nukleare Matrixelement unbeeinflusst bleibt. (i) Wie wir in Abschnitt 2.5 sehen werden, liegt der wahrscheinlichste Energietransfer von einem Feld der Stärke $\nu \sim 1$ auf ein bei einem typischen Betazerfall emittiertes Elektron in der Größenordnung von MeV. Dies ist vergleichbar mit der kinetischen Energie des Elektrons. Es sind also beträchtliche Änderungen im Spektrum und im Phasenraum der emittierten Elektronen zu erwarten. Bei Kernen, bei deren Zerfall sehr wenig Energie frei wird ($Q \ll mc^2$), ist der Phasenraum sehr klein und die totale Zerfallsrate hängt besonders empfindlich vom Q-Wert ab ($\Gamma \propto Q^{7/2}$). Es ist daher naheliegend, bei diesen Kernen durch eine effektive Erhöhung des Q-Wertes um ~ 1 MeV eine große Verstärkung der Zerfallsrate zu erwarten. (ii) Ein ähnlicher Effekt, der ebenfalls nur auf einer Modifikation der Elektronen-Wellenfunktion beruht und der ebenfalls Änderungen im Spektrum im MeV-Bereich bewirkt, sind die Coulomb-Korrekturen beim feldfreien Betazerfall. In erster Näherung kann man die beim feldfreien Betazerfall emittierten Teilchen durch ebene Wellen beschreiben. Wenn jedoch die Coulomb-Wechselwirkung zwischen Elektron und Kern im Endzustand mit berücksichtigt wird, erhält man den in Abb. 1 demonstrierten Effekt. Durch die Coulomb-Korrekturen wird nicht nur die Form des Spektrums deutlich verändert, sondern auch die totale Zerfallsrate, die der Fläche unter den gezeigten Kurven entspricht. Für die Wechselwirkung zwischen den Elektronen und einem äußeren Laserfeld sollte man ähnliche Effekte erwarten.

Becker et al. /18/ haben den nuklearen Betazerfall im Laserfeld unter der oben erläuterten Annahme diskutiert, daß nur die Elektronen-Wellenfunktion durch das äußere Feld beeinflusst wird, nicht aber die Kernwellenfunktionen. Sie fanden für die Verstärkung der totalen Zerfallsrate, je nach Kern und Stärke des äußeren Feldes, teilweise sehr große Werte. So soll die Lebensdauer von Tritium in einem Feld mit $\nu = 1.0$ um etwa 10^4 verkürzt werden, die Lebensdauer von ^{18}F um einen Faktor 20. Die Energieverteilung der emittierten Elektronen zeigt dabei nicht den flachen Verlauf wie beim feldfreien Zerfall, sondern weist ein zweites Maximum auf. Als einziger Feldparameter, der die Stärke der Lasereffekte bestimmt, wurde die Größe ν (1.1) angegeben.

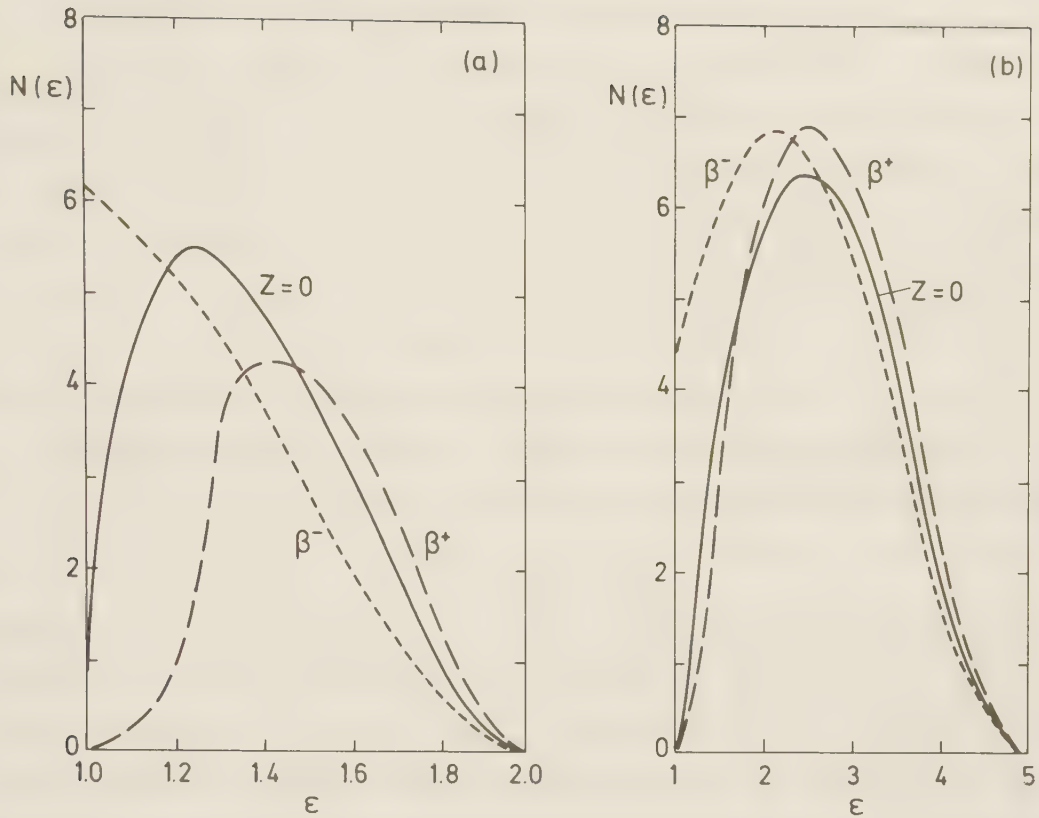


Abb. 1: Energieverteilung der emittierten Elektronen ohne Coulombkorrekturen ($Z = 0$) und mit Coulombkorrekturen für den β^+ - und β^- -Zerfall eines fiktiven Kerns mit $Z = 80$ und Zerfallsenergie a) $\Delta E_N = 2 mc^2$, b) $\Delta E_N = 5 mc^2$. Die Größe $\epsilon = E/mc^2$ bezeichnet die relativistische Elektronenenergie in Einheiten von $mc^2/17$.

Es existieren noch zwei weitere Vorschläge, wie mit intensiven elektromagnetischen Wellen Kernzerfälle beschleunigt werden können. Die Arbeiten von Reiss behandeln den verbotenen Betazerfall im äußeren Feld /19, 20/. Hierbei wurde für das äußere Feld kein Laser, sondern ein elektromagnetisches Feld im Radiofrequenzbereich gewählt. Diesem Vorschlag liegt die Annahme zugrunde, daß die Zerfallsrate des Kerns nicht so sehr durch eine Vergrößerung des Phasenraums beschleunigt wird, sondern dadurch, daß die Photonen durch Wechselwirkung mit dem Kern Spin und Parität ändern und damit die üblichen Auswahlregeln für verbotene Kernzerfälle aufheben können. Als entscheidender Parameter für die Feldeffekte wurde die Größe $(R/\lambda_c)v$ angegeben, wobei R der Kernradius ist. Die voraus-

gesagten Verstärkungen der totalen Zerfallsrate in einem Radiofeld mit Feldstärke $E_0 = 10^4$ V/cm sind erheblich: für ^{90}Sr soll sich die Lebensdauer um einen Faktor 4, für ^{87}Rb um 10^5 und für ^{113}Cd gar um 10^{13} verkürzen lassen. Da Experimente mit Radiofeldern im Dauerbetrieb durchgeführt werden können, sollten diese Verstärkungen leicht nachweisbar sein. Entsprechende Experimente zur Beschleunigung von Kernzerfällen sind auch bereits im Gange /21/.

Der unseres Wissens älteste Vorschlag, den Zerfall von Atomkernen durch direkte Wechselwirkung mit intensiven, im Labor erzeugbaren elektromagnetischen Wellen zu beeinflussen, stammt von Arad et al. /22/. In dieser Arbeit wurde der Gammazerfall des isomeren Zustandes $^{111\text{m}}\text{Pd}$ ($11/2^-$, 170 keV, 5.5 h) in einem Nd-Laserfeld der Intensität 10^{15} W/cm² untersucht. Für den Laser-induzierten Zerfallsmechanismus wurde angenommen, daß der isomere Kern durch Ein-Photon-Absorption aus dem Feld in einen virtuellen Zwischenzustand angeregt wird, aus dem er wesentlich schneller in den Grundzustand zerfallen kann als aus dem isomeren Zustand. Für das gewählte Beispiel wurde eine Beschleunigung der Zerfallszeit um etwa 10^5 berechnet. Eine derart große Verstärkung der Zerfallsrate sollte sich während eines einzelnen Laserpulses experimentell nachweisen lassen. Im Gegensatz zu den beiden oben zitierten Vorschlägen beruht dieser Effekt nicht auf Multiphoton-Wechselwirkung extrem hoher Ordnung, sondern auf einem Ein-Photon-Prozeß.

Alle drei Vorschläge sind nicht unumstritten. So stimmen die Ergebnisse von Becker et al. /18/ zwar sehr gut mit Untersuchungen von Baranov /23/ zum freien Neutronzerfall in intensiven Strahlungsfeldern überein. In Ref. 23 wird für den freien Neutronzerfall in einem Laserfeld mit $\nu \sim 1$ eine Verstärkung der totalen Zerfallsrate um etwa einen Faktor 10 berechnet, das Energiespektrum der Elektronen hat ebenfalls zwei Maxima, und das äußere Feld geht in die ganze Theorie nur über den Parameter ν ein. Für die Form des Spektrums mit zwei Maxima gibt es jedoch keine plausible physikalische Erklärung. Außerdem widerspricht das Ergebnis Untersuchungen zum Zerfall verschiedener Elementarteilchen in gekreuzten konstanten elektrischen und magnetischen Feldern, die vor allem von Nikishov und Ritus durchgeführt wurden /24, 25/. In diesen Feldern ändert

sich - genauso wie in den aus astrophysikalischen Gründen untersuchten konstanten Magnetfeldern - die Lebensdauer des zerfallenden Elementarteilchens erst dann merklich, wenn die Feldstärke vergleichbar wird mit der kritischen Feldstärke. Aus diesen Arbeiten würde man schließen, daß auch in einem Laserfeld, das ja auf der nuklearen Zeitskala sehr langsam variiert, die Änderung der totalen Zerfallsrate im wesentlichen von E_0/E_c abhängt. Dagegen benötigt man nach den Rechnungen von Baranov und Becker et al. im Grenzfall gekreuzter konstanter Felder ($\lambda \rightarrow \infty$) nur beliebig schwache Feldstärken, um die totale Zerfallsrate zu modifizieren. Die widersprüchlichen Ergebnisse zum Zerfall von Elementarteilchen in intensiven elektromagnetischen Feldern werden im folgenden Abschnitt 1.2 im Detail referiert.

Bei dem Vorschlag von Reiss /19/ stellt sich dasselbe Problem. Auch hier geht das äußere Feld nicht über die Intensität, sondern über den Wechselwirkungsparameter ν in die Änderung der totalen Zerfallsrate ein. Dies wird auch konsequent ausgenutzt zu dem Vorschlag, Zerfälle mit intensiven Radiofeldern zu beschleunigen. Die Möglichkeit, Kernzerfälle mit zwar intensiven, aber doch konventionellen Radiofeldern zu beeinflussen, widerspricht eigentlich jeder intuitiven Erwartung. Auch die Voraussage von Arad et al. /22/ ist nicht sehr plausibel. Durch Absorption eines Photons im eV-Bereich sollen Zwei-Stufen-Prozesse in großer Rate induziert werden können, obwohl das nächste reelle Niveau im Kernspektrum einige 100 keV über dem Ausgangszustand liegt. Die vorgeschlagenen Absorptionsprozesse müßten also extrem weit entfernt von irgendwelchen Resonanzen stattfinden.

Ziel der hier vorliegenden Arbeit ist, alle drei bisher bekannten Vorschläge zur Beschleunigung von Kernzerfällen mit intensiven Strahlungsfeldern anhand unabhängiger Rechnungen kritisch zu überprüfen, allgemeine Kriterien abzuleiten, unter denen nukleare Zerfälle durch elektromagnetische Wellen beeinflußt werden können, Voraussagen aufzustellen, was bei verschiedenen experimentellen Anordnungen beobachtet werden kann, und neue Vorschläge zu diskutieren, wie sich nukleare Zerfallsraten mit intensiven elektromagnetischen Feldern modifizieren lassen. Falls sich der Zerfall von Kernen tatsächlich mit technisch realisierbaren Feldern beschleunigen ließe, könnte dies zu bedeutenden praktischen Anwendungen führen. Man denke nur an das Problem des radioaktiven Abfalls.

In den folgenden zwei Abschnitten 1.2 und 1.3 werden die Arbeiten zum Zerfall von Elementarteilchen in intensiven Feldern referiert sowie verschiedene Anwendungsmöglichkeiten von Lasern in der Kernphysik besprochen, die unabhängig von der Beschleunigung von Kernzerfällen vorgeschlagen wurden. In dem ersten Teil der Arbeit (Kapitel II-V) wird der Zerfall von Atomkernen in intensiven langwelligen Feldern untersucht. Unter "intensiv" verstehen wir Felder, für die der Wechselwirkungsparameter ν (1.1) für Elektronen in der Größenordnung von Eins liegt. Wir bezeichnen ein Feld als "langwellig", wenn die Photonenenergie $\hbar\omega$ klein ist gegen die auftretenden Übergangs- und Zerfallsenergien eines Korns, die üblicherweise im MeV-Bereich liegen. Wir haben hierbei in erster Linie Laserfelder im Auge, doch werden wir zu Vergleichszwecken die Theorie gelegentlich auch auf Radiofelder anwenden. Es ist zu erwarten, daß langwellige Felder den Zerfall von Kernen nur aufgrund von Multiphotonprozessen sehr hoher Ordnung beeinflussen können. In diesem ersten Teil der Arbeit wird hauptsächlich der nukleare Betazerfall diskutiert, mit Gammazerfall und Elektroneneinfang werden wir uns erst im zweiten Teil (Kapitel VI-VII) beschäftigen.

In Kapitel II wird die Wechselwirkung zwischen einem langwelligen intensiven Feld und den am nuklearen Betazerfall beteiligten Teilchen diskutiert. Neben der Bewegung eines freien Teilchens in einem elektromagnetischen Feld wird besonderes Gewicht auf die Wechselwirkung zwischen dem äußeren Feld und den im Kern gebundenen Nukleonen gelegt, da darin der wesentliche Unterschied zwischen dem Zerfall von Elementarteilchen und dem nuklearen Betazerfall besteht. In Kapitel III wird der erlaubte nukleare Betazerfall im äußeren Feld untersucht. Die Ergebnisse dieses Kapitels erlauben eine Überprüfung der Voraussagen von Ref. 18. In der sog. "quasiklassischen Näherung" lassen sich alle Rechnungen analytisch ausführen. Die anschauliche Bedeutung und die Gültigkeit dieser Näherung werden ausführlich diskutiert. Der Schwerpunkt liegt in Kapitel III auf der Berechnung der Energie- und Winkelverteilung der emittierten Elektronen. Wir werden sehen, daß die Änderung der totalen Zerfallsrate nur auf Quanteneffekten beruht, und daß daher die Lebensdauer eines Korns in der quasiklassischen Näherung von einem äußeren Feld nicht beeinflusst wird. In Kap. IV werden diese Quantenkorrekturen zur totalen Zerfallsrate be-

stimmt. Die Rechnungen sind nicht auf den erlaubten Betazerfall beschränkt, sondern es werden verbotene Übergänge beliebiger Ordnung zugelassen. Dieses Kapitel erlaubt eine unabhängige Überprüfung von Ref. 19 und 20. Wir werden sehen, daß sich die Quanteneffekte auf die totale Zerfallsrate durch einen Operator ausdrücken lassen, der auf die feldfreie Rate wirkt. Dies wird für die totale Zerfallsrate zu einer Störungsreihe in dem äußeren Feld führen. In Kapitel V werden die Ergebnisse von Kapitel III und Kapitel IV auf beliebige Zerfalls- und Streuprozesse in beliebigen langwelligen elektromagnetischen Feldern verallgemeinert. Wir werden beweisen, daß die totale Zerfallsrate bzw. der totale Wirkungsquerschnitt mit langwelligen Feldern der Intensitäten, wie sie heutzutage technisch erzielbar sind, praktisch nicht geändert werden können, wenn nur geladene Teilchen im Endzustand durch das äußere Feld beeinflusst werden.

Während im ersten Teil der Arbeit (Kap. III - V) nur die Wechselwirkung zwischen äußerem Feld und emittierten geladenen Teilchen berücksichtigt wird, werden im zweiten Teil (Kap. VI - VII) Kernzerfälle untersucht, die aufgrund der Wechselwirkung zwischen dem äußeren Feld und dem Kern selbst stattfinden. Intuitiv würde man annehmen, daß die Kern-Feld-Wechselwirkung nur in quasiresonanten Feldern eine Rolle spielt, bei denen die Photonenenergie $\hbar\omega$ in der Nähe einer nuklearen Anregungsenergie liegt (während durch die Wechselwirkung zwischen Feld und emittierten geladenen Teilchen auch in langwelligen Feldern große Einflüsse auf den Zerfall zu erwarten sind, wie oben veranschaulicht wurde). Der Schwerpunkt wird im zweiten Teil dieser Arbeit also auf quasiresonanten Feldern liegen, d. h. auf Feldern im Röntgen- und Gammabereich. Wir werden jedoch auch untersuchen, welche Auswirkungen die Wechselwirkung eines Kerns mit einem langwelligen Feld auf den Zerfall hat.

In diesem zweiten Teil der Arbeit werden wir nur Ein-Photon-Prozesse betrachten, die durch die Kern-Feld-Wechselwirkung hervorgerufen werden. Durch Absorption eines Photons aus dem äußeren Feld kann der radioaktive Kern in einen angeregten Zustand angehoben werden, dessen Zerfallskonstante völlig verschieden sein kann von der des Grundzustandes. Falls beispielsweise der Zerfall des Grundzustandes verboten, der des angeregten Zustandes aber erlaubt ist, kann der Zerfall mit Hilfe des äußeren Feldes beschleunigt werden. Eine spezielle Form dieser feldinduzierten Zwei-Stufen-Prozesse, die inelastische Photonenstreuung,

ist in der Atom- und Molekülphysik als Ramaneffekt bekannt. Die Theorie dazu kann aus Lehrbüchern der Quantenoptik /26/ entnommen werden. In der Kernphysik sind auch Photon-Streuprozesse der Form (γ, n) , (γ, p) , (γ, pn) , ... bekannt, bei denen durch Photonabsorption Teilchen-instabile Kernzustände angeregt werden können ("photo-disintegration"). Für diese Prozesse sind jedoch Gammaenergien im Bereich 15 - 30 MeV notwendig, also weit oberhalb der Separationsenergie für ein einzelnes Nukleon. In diesem Energiebereich werden spezielle kollektive Kernmoden angeregt, die sog. Riesenresonanzen. Diese Prozesse sind jedoch zu unterscheiden von dem hier betrachteten Fall, daß durch Wechselwirkung mit dem quasiresonanten Feld niedrig liegende Zustände angeregt werden, von denen aus der Kern in den Endzustand zerfällt.

Die Ein-Photon-Absorption (vorzugsweise aus einem quasiresonanten Röntgen- oder Gammafeld) ist von grundlegender Bedeutung für die Kernspektroskopie. Genauso wie die Entwicklung von Lasern zu einem großen Durchbruch in der Atom- und Molekülspektroskopie führte, könnten schmalbandige, intensive Röntgen- und Gammaquellen die Kernspektroskopie revolutionieren. Neben der Beschleunigung nuklearer Zerfallsraten sind zwei weitere wichtige Anwendungen von Ein-Photon-Absorptionsprozessen denkbar: sie ermöglichen u. U. eine sehr genaue Bestimmung der Ruhemasse des Neutrinos, wie in Abschnitt 6.5 gezeigt wird, und sie spielen eine Rolle bei der Entwicklung von Pumpmechanismen für mögliche nukleare Lasersysteme. Auf diesen letzten Punkt werden wir in Abschnitt 1.3 zurückkommen.

In Kap. VI und VII wird nur die totale Rate für photoinduzierte Kernzerfälle berechnet mit dem Ziel, die Feldparameter abzuschätzen, bei denen meßbare Änderungen der Lebensdauer radioaktiver Kerne auftreten. Die untersuchten Zwei-Stufen-Prozesse lassen sich im Prinzip zur Modifikation der Zerfallsrate bei allen möglichen nuklearen Zerfallsmoden verwenden. Wir werden als Beispiel den Gammazerfall isomerer Kernzustände sowie Betazerfall unter Emission von Elektronen und Positronen oder unter Elektroneneinfang betrachten. In Kap. VI werden die feldinduzierten Zerfallsprozesse in zweiter Ordnung Störungstheorie behandelt. Die Unter-

suchungen des Gammazerfalls erlauben eine Überprüfung der Ergebnisse von Ref. 22. Der feldinduzierte Elektroneneinfang eröffnet eine Möglichkeit, u.U. die Neutrinomasse sehr genau zu bestimmen. In Kap. VII wird der Sättigungsbereich für sehr intensive Felder untersucht. Es soll die prinzipiell größtmögliche Verstärkung von Kernzerfällen bestimmt und die dafür benötigten Feldparameter abgeschätzt werden.

1.2 Teilchenzerfälle in intensiven Feldern

Zum Zerfall von Elementarteilchen in intensiven langwelligen Feldern gibt es bereits einige Arbeiten in der Literatur. Die verschiedenen Rechnungen gelangten zu teilweise widersprüchlichen Ergebnissen. Im folgenden sollen diese Arbeiten kurz referiert werden. Ergebnisse werden nur wiedergegeben, sofern sie für die in dieser Arbeit betrachteten Situationen von Interesse sind und sich mit den Resultaten der folgenden Kapitel vergleichen lassen.

Die Entwicklung von Lasern initiierte eine Reihe von theoretischen Arbeiten über Quantenprozesse von Elementarteilchen in intensiven Strahlungsfeldern. Bei der quantenmechanischen Beschreibung dieser Prozesse wird das Laserfeld als klassisches, äußeres elektromagnetisches Feld behandelt. Das Interesse konzentrierte sich zuerst auf Prozesse, die ohne äußeres Feld verboten sind. Reiss untersuchte 1962 erstmals die Paarerzeugung aus einem Photon ($\gamma \rightarrow e^+e^-$) bei Anwesenheit eines intensiven Strahlungsfeldes /27/. Brown und Kibble /28/ sowie Gol'dman /29/ berechneten die Emission eines einzelnen Photons durch ein freies Elektron im intensiven Feld ($e \rightarrow e\gamma$). Systematisch wurden diese Effekte, einschließlich der Ein-Photon-Verrichtung eines Elektron-Positron-Paares ($e^+e^- \rightarrow \gamma$), von Nikishov und Ritus /30/ diskutiert. Bald darauf wurden auch die Zerfälle verschiedener Elementarteilchen in intensiven Feldern behandelt - Prozesse also, die auch im Vakuum stattfinden. Referenz 24 beschäftigt sich mit den Zerfallsmode $\pi \rightarrow \mu + \nu$ und $\pi \rightarrow e + \nu$ geladener Pionen, in Ref. 25 werden die Drei-Körper-Zerfälle $\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ und $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$ sowie die Neutrino-Emission eines Elektrons $e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ diskutiert.

Die Ergebnisse von Ref. 24, 25 und 30 sollen kurz referiert werden, da sie Ähnlichkeiten mit den in dieser Arbeit abzuleitenden Resultaten aufweisen. Als technisches Detail sei angemerkt, daß in allen drei Arbeiten

lineare Polarisation des äußeren Feldes vorausgesetzt wird, wodurch die Übergangswahrscheinlichkeiten mathematisch mit Hilfe sog. verallgemeinerter Besselfunktionen beschrieben werden müssen. In den Rechnungen wird nur der Feldeinfluß auf die totale Übergangsrate bestimmt, nicht aber auf die Spektren der Teilchen im Endzustand. Die totale Übergangsrate läßt sich jedoch nicht geschlossen berechnen, sondern nur durch Integrale und unendliche Summen darstellen. In Ref. 24, 25 und 30 werden daher nur zwei Spezialfälle diskutiert: (a) Für $v \ll 1$ erhält man die Ergebnisse der Störungstheorie niedriger Ordnung. In einer Fourierreihenentwicklung der Übergangswahrscheinlichkeit (Summationsindex n) können die Koeffizienten der Fourierreihe nach v entwickelt werden. Damit erhält man für die Übergangswahrscheinlichkeit eine Potenzreihe in v^2 . Der Anteil $\sim v^0$ des $n=0$ - Terms liefert die Rate für den feldfreien Zerfall, der Anteil $\sim v^2$ des $n=1$ - Terms beschreibt den Prozeß unter Absorption eines Photons aus dem Feld, usw. Falls die Wellenlänge des äußeren Feldes so groß wird, daß zwar $v \ll 1$, aber andererseits $v(\lambda/\lambda_c) \gtrsim 1$ ist, so gibt es in den einzelnen Netto-Multiphotontermen n merkliche Abweichungen von der Störungstheorie (Entwicklung nach v^{2n}), die totale Übergangswahrscheinlichkeit nach Summation über alle Multiphotonprozesse ist jedoch praktisch unbeeinflußt durch das äußere Feld.

(b) Im entgegengesetzten Grenzfall $v \rightarrow \infty$ geht die Zerfallsrate über in die Rate in einem "gekreuzten, konstanten Feld", bei dem elektrisches und magnetisches Feld konstant, senkrecht aufeinander und betragsgleich sind. In diesem Fall hängt die totale Übergangsrate nur über den Lorentz-invarianten Parameter

$$\chi = v \frac{\hbar k^\mu p_\mu}{M^2 c^2} = \frac{E_0}{E_c} \frac{p^0 - p^3}{M c} \quad (1.3)$$

vom äußeren Feld ab. Hierbei bedeutet k^μ den 4-Ausbreitungsvektor des Feldes, p^μ und M bezeichnen den 4-Impuls und die Masse des zerfallenden Teilchens. Für ein ruhendes Teilchen ist χ identisch mit dem dimensionslosen Feldstärkeparameter E_0/E_c . Merkliche Feldeffekte treten für $\chi \sim 1$ auf. Um in einem Laserfeld mit $E_0 = 3 \times 10^{10}$ V/cm $\chi \sim 1$ zu erreichen, muß das zerfallende Teilchen extrem relativistische Energie besitzen, beispielsweise ein Pion $E = 4 \times 10^{18}$ eV. Für hochrelativistische Teilchen in Feldern mit $E_0 \ll E_c$ sind die Ergebnisse, die für gekreuzte konstante

Felder abgeleitet werden, auch auf beliebige konstante Felder anwendbar. Die Methode ermöglicht es also, die Ergebnisse zu reproduzieren, die aus astrophysikalischem Interesse für konstante, starke Magnetfelder berechnet wurden.

In Ref. 24, 25 und 30 werden im Grenzfall gekreuzter konstanter Felder wieder zwei Spezialfälle unterschieden: (b1) Für die hier vorliegende Arbeit ist hauptsächlich der Grenzfall $\chi \ll 1$ von Interesse, da für alle im Labor technisch erzeugbaren Felder $E_0 \ll E_c$ ist. In diesem Grenzfall kann die totale Zerfallsrate als Potenzreihe in χ^2 entwickelt werden. Dabei liefert der erste Term $\propto \chi^0$ bei Zerfallsprozessen die Rate für den Zerfall im Vakuum, bei Photon-Emission durch ein Elektron die klassische Wahrscheinlichkeit für die Strahlung eines geladenen Teilchens, das sich in einem gekreuzten konstanten Feld bewegt. Für fast alle untersuchten Zerfälle wurde eine Verstärkung der Zerfallsrate durch das äußere Feld gefunden. Nur bei dem Zerfallsprozeß $\pi \rightarrow e + \nu$, bei dem besonders viel Energie frei wird, führt das äußere Feld zu einer (geringen) Verlangsamung des Zerfalls. Die Massendifferenz zwischen dem zerfallenden Teilchen und den Zerfallsprodukten spielt eine entscheidende Rolle. So ist bei kleiner Massendifferenz der effektive Feldparameter durch $\chi/(1-M_f/M_i)^2$ gegeben. Dies ist vor allem beim Pion-Zerfall von Bedeutung. Mit kleiner werdender Zerfallsenergie reichen also niedrigere Feldintensitäten zur Beeinflussung des Zerfalls aus. Diese Tatsache sollte sich insbesondere für Kernzerfälle ausnutzen lassen, bei denen recht kleine Zerfallsenergien auftreten können. (b2) Im Grenzfall $\chi \gg 1$ besteht ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen totaler Übergangsrate und Feldparameter χ .

Für das Ziel der hier vorliegenden Arbeit, die Beeinflussung von Kernzerfällen mit intensiven Lasern im Bereich $\nu \sim 1$, ist der nichtlineare Zwischenbereich zwischen dem Regime der Störungstheorie ($\nu \ll 1$) und dem Regime gekreuzter konstanter Felder ($\nu \gg 1$) von zentralem Interesse. Dieser Bereich wurde für die in Ref. 24, 25 und 30 diskutierten Quantenprozesse von Narozhnyi et al. /31/ und Lyul'ka /32/ anhand von numerischen Rechnungen untersucht. Zur Vereinfachung der Rechnungen wurden jetzt zirkular statt linear polarisierte Felder verwendet. Intensität und Wellenlänge der ebenen Welle wurden durch die invarianten

Parameter χ und ν beschrieben. Bei festem $\chi \sim 1$ wurde der Übergang der totalen Zerfallsrate $\Gamma(\nu, \chi)$ vom Vakuumwert ($\nu \rightarrow 0$) zum Grenzfall konstanter gekreuzter Felder ($\nu \rightarrow \infty$) numerisch untersucht. Dies entspricht einer Durchstimmung der Feldfrequenz von sehr großen zu sehr kleinen Werten bei festgehaltener Intensität. Es zeigte sich, daß dieser Übergang recht glatt, in den meisten untersuchten Fällen sogar monoton vorstatten geht. Als entscheidender Parameter für den Feldeinfluß auf die totale Übergangsrate wurde bei den untersuchten Beispielen die Größe χ und damit die Intensität des Feldes identifiziert. Die Sensitivität von Γ auf die Wellenlänge ist für $\nu \gtrsim 1$ gering. Für merkliche Abweichungen von der Vakuumrate wird $\chi \gtrsim 1$ (sowie $\nu \gtrsim 1$) benötigt. Neben der Abhängigkeit von $\Gamma(\nu, \chi)$ von ν bei festem χ wurde auch untersucht, wie die einzelnen Ordnungen n von Multiphoton-Absorption zu $\Gamma(\nu, \chi)$ bei festem ν und χ beitragen. Im Bereich $\chi \sim 1$ wurde gefunden, daß für $\nu \lesssim 1$ nur Multiphoton-Prozesse sehr niedriger Ordnung ($n < 10$) zur totalen Übergangsrate beitragen, während für $\nu \gg 1$ viele Terme hoher Ordnung eine Rolle spielen /31/. Aus Ref. 32 ist weiterhin zu entnehmen, daß die unterschiedlichen Polarisationsformen in der totalen Übergangsrate zu qualitativ ähnlichen Ergebnissen führen.

Der Betazerfall des freien Neutrons $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}$ in einer ebenen Welle wurde erstmals von Baranov untersucht /23/. Für das Strahlungsfeld wurde eine zirkular polarisierte Welle in den Parameterbereichen $\nu \ll 1$ und $\nu \sim 1$ angenommen. Für $\nu \ll 1$ wurde für die totale Zerfallsrate wieder eine Potenzreihe in ν^2 gefunden. Für Laserfelder im Bereich $\nu \sim 1$ wurde erstmals die Energieverteilung der emittierten Teilchen untersucht. Im Gegensatz zum Betazerfall im Vakuum hat nach Ref. 23 das Spektrum der emittierten Elektronen zwei Maxima, wobei das dazwischen liegende Minimum in der Nähe des oberen Endes des feldfreien Spektrums liegt und die Größe des zweiten Maximums mit wachsendem ν rasch anwächst. Diese unerwartete Struktur wurde von Baranov mit virtuellen Zerfallsprozessen begründet, deren Energie die beim Vakuumzerfall frei werdende Energie übersteigt und die durch Absorption eines Photons aus dem äußeren Feld reell werden können. Für den Vergleich mit den Resultaten der folgenden Kapitel ist besonders interessant, daß für $\nu \sim 1$ eine Verstärkung der totalen Zerfallsrate des Neutrons um etwa einen Faktor 10 gefunden wurde. Mit wachsendem ν wächst die Zerfallswahrscheinlichkeit stark an. Dieses Er-

gebnis weicht wesentlich ab von den Untersuchungen zum Pion- und Myon-Zerfall, bei denen Intensitäten in der Größenordnung $\chi \sim 1$ benötigt werden, um die Lebensdauer in diesem Ausmaß zu ändern. Dieser Widerspruch wurde mit der viel kleineren Massendifferenz $M_n - M_p \sim 2.53 m_e$ zwischen den Teilchen im Anfangs- und Endzustand beim Neutronzerfall erklärt.

Ternov et al. /33/ untersuchten vor allem für die schwache Wechselwirkung spezifische Polarisierungseffekte wie die Beeinflussung der Spin-Winkel-Korrelation beim Betazerfall eines polarisierten Neutrons. Als äußeres Feld wurde dazu ein konstantes Magnetfeld, eine zirkular polarisierte ebene Welle sowie eine Superposition beider Felder betrachtet. Die Polarisierung der emittierten Elektronen sowie deren Winkelasymmetrie wurden für die ebene Welle im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ (Multiphoton-Prozesse sehr hoher Ordnung) numerisch berechnet ("quasiklassischer Grenzfall"). Aus Ref. 33 ist ersichtlich, daß in diesem Grenzfall die Verteilung der Elektronen nur über den Parameter ν vom äußeren Feld abhängt. Aufgrund großer Feldeffekte in der Verteilung für $\nu \sim 1$ wurde behauptet, daß die totale Zerfallswahrscheinlichkeit mit wachsendem ν rasch anwächst. Dies bestätigt die Ergebnisse von Baranov. Analytische Ausdrücke für die totale Zerfallsrate wurden nur im Grenzfall konstanter gekreuzter Felder ($\nu \rightarrow \infty$) gewonnen. Diese Resultate sind analog zu denen in Ref. 24, 25, 30 und 31.

Zusammenfassend kann man sagen, daß bei Teilchenzerfällen in konstanten gekreuzten Feldern die Feldstärke mit der kritischen Feldstärke vergleichbar sein muß, um Änderungen in der totalen Zerfallsrate zu bewirken. Ausnahmen bestehen nur, wenn bei dem Zerfallsprozeß nur sehr wenig Energie freigesetzt wird. Bei Teilchenzerfällen in ebenen Wellen ist die Situation unklar. Während Ref. 31 und 32 darauf hindeuten, daß die Ergebnisse für konstante gekreuzte Felder auch auf ebene Wellen anwendbar sind, muß man aus Ref. 23 und 33 schließen, daß beim Neutronzerfall, bei dem ja besonders wenig Energie freigesetzt wird, Laserfelder mit $\nu \sim 1$ ausreichen, um die Lebensdauer merklich zu beschleunigen.

1.3 Laser in der Kernphysik

In diesem Abschnitt sollen die verschiedenen Vorschläge zusammengestellt werden, die bisher zur Anwendung von Lasern in der Kernphysik publiziert wurden. Mit Lasern kann nicht nur spektroskopische Information über den Atomkern gewonnen werden, sondern man kann auch Kernprozesse direkt beeinflussen. Laserinduzierte Kernprozesse könnten zu einigen wichtigen technischen Anwendungen führen wie der Entwicklung nuklearer Gamma-Laser ("Graser") oder der Beeinflussung der Lebensdauer radioaktiver Kerne.

Bisher beschränkte sich in der Kernphysik die experimentelle Anwendung von Lasern auf Situationen, in denen die Zustände des Kerns und der Atomhülle gekoppelt sind, so daß man durch die Wechselwirkung zwischen Laser und Hüllenelektronen Rückschlüsse auf den Kern ziehen und ihn unter Umständen sogar beeinflussen kann. Diese Aktivitäten sind in einem Übersichtsartikel von Murnick und Feld zusammengefaßt /34/. Im wesentlichen handelt es sich hierbei um die Messung der Hyperfeinaufspaltung sowie der Isotopieverschiebung atomarer Niveaus mit Hilfe hochauflösender spektroskopischer Techniken. Aus der präzisen Bestimmung des atomaren Hyperfeinstruktur-Spektrums erhält man Informationen über verschiedene Kerngrößen wie den Kernspin, magnetisches Dipol- und elektrisches Quadrupolmoment sowie u.U. höhere Kernmomente, den Ladungsradius und die Deformation des Kernvolumens. Diese Untersuchungen werden inzwischen auch an instabilen, teilweise sehr kurzlebigen (bis zu Lebensdauern in der Größenordnung von Millisekunden) Kernen durchgeführt /35/.

Lasers sind jedoch nicht nur zur spektroskopischen Bestimmung von Kerndaten geeignet, sondern können auch Kernprozesse direkt beeinflussen. Für die Änderung nuklearer Zerfallskonstanten durch Laserfelder bieten sich wieder die eingangs diskutierten Zerfallsmoden innere Konversion und Elektroneneinfang an. Durch die Wechselwirkung mit dem Laser können die Wellenfunktionen gebundener Elektronen in der Atomhülle und damit die Lebensdauer des Kerns modifiziert werden. Von besonderem Interesse ist hierbei das Uran-Isotop ^{235}U , das einen ungewöhnlich niedrig liegenden isomeren Zustand $^{235\text{m}}\text{U}(1/2^+, 73 \text{ eV})$ besitzt, der praktisch ausschließlich durch Emission von Konversionselektronen in 26 min in den Grundzustand $^{235}\text{U}(7/2^-, \text{g.s.})$ zerfällt /36/. Aus der veränderten Zer-

fallszeit in einem durchstimmbaren Laserfeld könnte man Information über die relativen Beiträge der verschiedenen Elektronenzustände zur totalen Konversionsrate und über die Kernwellenfunktion erhalten.

Experimentell beobachtet wurde bereits die "inverse innere Elektronen-Konversion", bei der ^{235}U durch Bestrahlung mit einem intensiven Laser aus dem Grundzustand in den isomeren Zustand angeregt wird /37/. In diesem Experiment wird ein 10 MW-Laser dazu verwendet, ein Plasma mit ^{235}U -Ionen zu erzeugen. Eine mögliche Erklärung der Kernanregung besteht darin, daß ein Elektron aus einer inneren Schale ionisiert wird, so daß sich einige ^{235}U -Ionen in angeregten elektronischen Zuständen befinden, deren Energie näherungsweise resonant mit der Kern-Anregungsenergie ist. Das angeregte Ion kann dann seine Energie nicht nur über die beiden üblichen Zerfallsmoden, Emission von Röntgenstrahlung oder Auger-Elektronen, abgeben, sondern auch den Kern anregen /38/. Die andere Erklärung der inversen inneren Konversion besagt, daß die ^{235}U -Ionen im Plasma freie Elektronen geeigneter Energie aus dem Kontinuum in eine äußere Schale einfangen und die freiwerdende Energie an den Kern abgeben /39/. Bei dem betrachteten Experiment scheint die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von freien zu gebundenen Elektronenzuständen wesentlich größer zu sein als die für den Übergang zwischen zwei gebundenen Zuständen, doch gibt es in diesem Zusammenhang noch eine Reihe ungeklärter Fragen. Die inverse innere Elektronen-Konversion ist genauso wie die Röntgenabsorption aus einem laserinduzierten Plasma /40/ interessant als Pumpmechanismus für nukleare Gamma-Laser. Diese beiden inkohärenten optischen Pumpprozesse werden als Alternative zum Pumpen der Inversion mit intensiven Neutronenflüssen diskutiert /41/.

In jüngster Zeit mehren sich die theoretischen Arbeiten, in denen die direkte Wechselwirkung zwischen Atomkernen und intensiven Laserfeldern ohne den Umweg über die Hüllenelektronen untersucht wird. Hierbei sind zuerst die Arbeiten von Collins et al. /42/ zur laserinduzierten Resonanzabsorption von Gammastrahlung zu erwähnen. Bei typischen elektromagnetischen Übergängen in einen Kern ist die Energie des Kernrückstoßes um mehrere Ordnungen größer als die natürliche Linienbreite. Für Gammaübergänge im Bereich 0.1 - 1 MeV entspricht die Rückstoßenergie der Energie optischer Photonen. Mit Hilfe eines Hochleistungslasers könnte also in diesem

Energiebereich die Rückstoßverschiebung der Linie kompensiert werden, so daß Gammaquanten, die von freien Kernen in einer Quelle emittiert werden, von denselben Kernen in einem Target wieder absorbiert werden können. Das optische Photon kann dabei entweder einen M1-Übergang zwischen magnetischen Unterzuständen des Anfangs- oder Endzustandes bewirken oder einen E1-Übergang an einem Zwischenniveau anregen, das allerdings sehr nahe (eV-Bereich) bei dem Anfangs- oder Endzustand liegen müßte. Solche fast entarteten Zustände treten bei hochangeregten Kernen auf und sind angeblich insbesondere bei stark deformierten, ungeraden Kernen zu erwarten, doch lassen sie sich bisher mit konventionellen kernspektroskopischen Methoden nicht auflösen. Die simultane Absorption eines Gammaquants und eines optischen Photons ermöglicht Resonanz-Absorptions-Spektroskopie im Bereich 0.1 - 1 MeV. Die Frequenzen können mittels mechanischer Dopplerverschiebung durchgestimmt werden. Dieses Verfahren könnte zu einer Ergänzung der Mössbauer-Spektroskopie führen, die nur auf wenige Kerne und auf Übergangsenergien unterhalb 150 keV beschränkt ist. Andererseits kann man durch Bestrahlung von Kernen, die in einem Festkörnergitter gebunden sind, mit einem durchstimbaren, intensiven monochromatischen Feld ein um die Feldfrequenz verschobenes Mössbauer-Spektrum in Emission oder Absorption erhalten, dessen Linien praktisch genauso scharf sind wie die des ursprünglichen Spektrums /43/. Dieser Effekt könnte zu einer über einen weiten Bereich nicht-mechanisch durchstimbaren Quelle sehr schmalbandiger Gammastrahlung führen. Für ⁵⁷Fe in einer ferromagnetischen Eisenfolie, an die ein zeitabhängiges Magnetfeld im Radiofrequenzbereich angelegt wurde, wurden bereits Seitenbänder im Mössbauer-Spektrum experimentell beobachtet /44/, die sich evtl. als Zwei-Photon-Mössbauer-Effekt interpretieren lassen /45/. In Form von stimulierter anti-Stokes Raman-Streuung mit einem optischen und einem Gammaquant könnten Hochleistungslaser auch zum kohärenten optischen Pumpen eines nuklearen Gammalasers aus einem isomeren Zustand heraus dienen /46, 47/. Voraussetzung dazu sind allerdings große Fortschritte in der Kernspektroskopie, so daß Niveaus, deren Abstand im eV-Bereich liegt, aufgelöst werden können.

Außer diesen verschiedenen laserinduzierten Zwei-Photonen-Übergängen in einem Kern sind Streu- und Zerfallsprozesse von Kernen in Anwesenheit eines intensiven äußeren Feldes von Interesse. Die drei bisher publizierten Vorschläge zur Beeinflussung von Kernzerfällen mit intensiven elektromagnetischen Wellen wurden bereits in Abschnitt 1.1 referiert. Bei Streuprozessen ist es naheliegend, zuerst die Compound-Kern-Bildung durch Neutroneneinfang unter Lasereinfluß zu studieren, da in Compound-Kernen die Zustände sehr dicht (Niveauabstände im eV-Bereich) liegen. Zaretskii und Lomonosov /48/ fanden, daß durch Ein-Photon-Absorption aus einem Laserfeld Compound-Kern-Niveaus besetzt werden können, die normalerweise beim Einfang thermischer Neutronen nicht angeregt werden, wodurch der totale Wirkungsquerschnitt der Reaktion vergrößert und spektroskopische Information über diese Zustände gewonnen werden kann. Inzwischen wurde auch die Coulomb-Anregung von Kernen unter dem Einfluß intensiver Laser diskutiert /49/, wobei der Formalismus aus Ref. 18 übernommen wurde.

Kapitel II

Wechselwirkung mit einem intensiven langwelligen Feld

Dieses Kapitel dient der Vorbereitung der folgenden Kapitel III-V, in denen nukleare Zerfallsprozesse in intensiven, langwelligen Feldern diskutiert werden. Dazu muß untersucht werden, welche Auswirkungen die Wechselwirkung mit vielen weichen Photonen auf den Kernzustand und auf den Zustand emittierter freier Teilchen wie beispielsweise der Elektronen und Positronen beim Betazerfall hat. Es müssen also die Wellenfunktionen gebundener wie freier Teilchen in einem intensiven niederfrequenten Feld abgeleitet werden. Dabei sind Multiphotonenprozesse sehr hoher Ordnung zu berücksichtigen, die nicht mehr störungstheoretisch behandelt werden können.

Wir wollen zuerst die unterschiedlichen, üblicherweise verwendeten Eichungen einführen, da sich gebundene und freie Zustände am anschaulichsten in verschiedenen Eichungen diskutieren lassen. Wir werden dann die Feldeffekte auf die Kernzustände abschätzen und einige Näherungsverfahren zur Berücksichtigung dieser Effekte diskutieren. Für freie Teilchen lassen sich die Feldeinflüsse exakt angeben. Diese Diskussion wird uns ein Modell liefern, das gut geeignet ist für die Beschreibung von Kernzerfällen in äußeren Feldern.

In Kapitel II-V wird das äußere Strahlungsfeld klassisch behandelt. Da extrem hohe Intensität und niedrige Frequenz vorausgesetzt werden, ist eine Quantisierung des Feldes nicht notwendig. Der Atomkern kann im Rahmen der nichtrelativistischen Schrödinger-Theorie beschrieben werden. Für die bei einem Zerfall emittierten freien Elektronen oder Positronen werden wir sowohl die Dirac- als auch die Schrödinger-Gleichung heranziehen.

Obwohl die wesentlichen neuen Ergebnisse der hier vorliegenden Arbeit erst in den folgenden Kapiteln präsentiert werden, enthält das Kapitel II doch einige Klarstellungen und neue Interpretationen zu Fragen, die auch heute in der Quantenoptik noch kontrovers diskutiert werden. Dazu gehört die Frage der "richtigen" Form der elektromagnetischen Teilchen-Feld-Wechselwirkung und der Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten mit diesen verschiedenen Formen, sowie die Definition nicht-wechselwirkender Zustände in einem äußeren Feld und die Interpretation bestimmter nichtstörungstheoretischer Methoden zur Beschreibung von Multiphotonprozessen. Für

eine detaillierte Darstellung der aktuellen Kontroversen in der Literatur zu diesen Themen sowie für eine konsistente Klärung dieser zwar elementaren, aber doch fundamentalen Fragen verweisen wir auf Ref. 50. Wir werden in diesem Kapitel nur soweit auf diese Probleme eingehen, wie sie für das Verständnis der folgenden Kapitel von Bedeutung sind.

2.1 Eichungen

In diesem Abschnitt sollen einige Eigenschaften der verschiedenen verwendeten Eichungen und der Transformationen zwischen ihnen zusammengestellt werden.

Ausgangspunkt der Diskussion ist die Schrödinger-Gleichung für ein nicht-relativistisches Teilchen, das in einem statischen Potential $V(\vec{r})$ gebunden ist und mit einem von außen angelegten elektromagnetischen Feld wechselwirkt. Diese Schrödinger-Gleichung kann formal aus der klassischen Hamiltonfunktion für ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld abgeleitet werden /26/. In einer gegebenen Eichung g hat sie die Gestalt

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^g(\vec{r}, t) = \left\{ \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A}^g(\vec{r}, t))^2 + V(\vec{r}) + eU^g(\vec{r}, t) \right\} \Psi^g(\vec{r}, t). \quad (2.1)$$

In dieser Gleichung tritt die Energie des Strahlungsfeldes nicht auf, da es sich um eine semiklassische Theorie mit klassischen, äußeren Feldern und quantisierter Materie handelt. Die Ladung des Teilchens wird mit e bezeichnet. (Beispielsweise gilt für ein Elektron $e = -e_0$, wobei e_0 die Elementarladung bezeichnet). Das Vektorpotential $\vec{A}^g(\vec{r}, t)$ und das skalare Potential $U^g(\vec{r}, t)$ sind mit dem elektrischen und magnetischen Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ verknüpft über die Beziehungen

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\vec{\nabla} U^g(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^g(\vec{r}, t), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}^g(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Die Potentiale $\vec{A}^g$ und U^g sind durch die Maxwell-Gleichungen nicht eindeutig bestimmt. Die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bleiben ungeändert, wenn man mit Hilfe der Eichtransformation

$$\begin{aligned}\vec{A}^{g'}(\vec{r}, t) &= \vec{A}^g(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \chi(\vec{r}, t), \\ U^{g'}(\vec{r}, t) &= U^g(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \chi(\vec{r}, t).\end{aligned}\quad (2.3)$$

von einer Eichung $(\vec{A}^g, U^g)$ zu einer anderen Eichung $(\vec{A}^{g'}, U^{g'})$ übergeht. Hierbei ist χ eine beliebige Funktion von $\vec{r}$ und t . Es ist wichtig zu beachten, daß auch der Zustandsvektor $|\psi^g\rangle$ in Gl. (2.1) eichabhängig ist. Die Wellenfunktionen in zwei Eichungen g und g' sind durch die unitäre Transformation T

$$\Psi^{g'}(\vec{r}, t) = T(\vec{r}, t) \Psi^g(\vec{r}, t), \quad T(\vec{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \chi(\vec{r}, t)} \quad (2.4)$$

miteinander verknüpft. Bei einer Eichtransformation müssen also gleichzeitig die Wellenfunktionen gemäß Gl.(2.4) und alle Potentiale in den Operatoren gemäß Gl. (2.3) transformiert werden. Man kann leicht nachprüfen, daß die Schrödinger-Gleichung (2.1) forminvariant unter solch einer Eichtransformation ist.

In dieser Arbeit werden wir das von außen angelegte Feld in der Regel durch eine monochromatische ebene Welle $\vec{E}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ beschreiben. Außerdem setzen wir voraus, daß das äußere Feld "langwellig" ist, d.h. daß die Wellenlänge groß ist gegen die Dimensionen des Atomkerns. Für Laser- und erst recht für Radiofelder ist dies sehr gut erfüllt. Man kann dann die räumliche Variation $\vec{k} \cdot \vec{r}$ des Feldes über den Bereich, in dem das Teilchen gebunden ist, vernachlässigen und die ebene Welle durch ein homogenes Feld $\vec{E}(t)$ beschreiben. Entsprechend ist auch das Vektorpotential $\vec{A}^g(t)$ nur zeitabhängig, womit das Magnetfeld vernachlässigt wird. Wir vernachlässigen also von Anfang an die Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Moment der am Zerfall beteiligten Teilchen und dem äußeren Feld im Vergleich zu der Wechselwirkung, die durch die elektrische Ladung hervorgerufen wird. Wird als Ursprung des Koordinatensystems der Kern gewählt, so ist die Phase $\vec{k} \cdot \vec{r} \approx 0$. In dieser Näherung kann das äußere Feld nur elektrische Dipolübergänge induzieren. Entsprechend heißt sie auch "Näherung großer Wellenlänge" oder "elektrische Dipolnäherung". In der nichtrelativistischen Schrödinger-Theorie des Atoms beschränkt man sich üblicherweise auf diese Näherung.

Im Rahmen der elektrischen Dipolnäherung sind in der Quantenoptik zwei Eichungen gebräuchlich. Die eine ist die Strahlungs-Eichung (R-Eichung = radiation gauge), manchmal auch Coulomb- oder Geschwindigkeits-Eichung genannt:

$$\vec{A}^R(\vec{r}, t) \equiv \vec{A}(t) = - \int_{-\infty}^t \vec{E}(t') dt' , \quad U^R(\vec{r}, t) = 0 . \quad (2.5)$$

(Nichtindizierte Vektorpotentiale $\vec{A}(t)$ sollen sich im folgenden immer auf die R-Eichung beziehen.) In der Dipol-Näherung ist die Bedingung $\text{div } \vec{A} = 0$ automatisch erfüllt. Die Schrödinger-Gleichung hat in der R-Eichung die Gestalt

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^R(\vec{r}, t) &= \left\{ \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A}(t))^2 + V(\vec{r}) \right\} \Psi^R(\vec{r}, t) \\ &= (H_0 + H_R(t)) \Psi^R(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Hierbei wurde der Hamilton-Operator aufgespalten in den sog. "unge störten" Anteil

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) \quad (2.7)$$

und den Anteil, der die Teilchen-Feld-Wechselwirkung enthält

$$H_R(t) = -\frac{e}{m} \vec{A}(t) \cdot \vec{p} + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2(t) . \quad (2.8)$$

Die R-Eichung liefert die bekannte $\vec{A} \cdot \vec{p}$ Wechselwirkung.

Die andere häufig verwendete Form der Teilchen-Feld-Wechselwirkung ergibt sich aus der sog. elektrischen Dipol-Eichung (E-Eichung), auch bekannt als elektrische Feld-, Göppert-Mayer-, Lamb- oder Längen-Eichung:

$$\vec{A}^E(\vec{r}, t) = 0 , \quad U^E(\vec{r}, t) = - \vec{E}(t) \cdot \vec{r} . \quad (2.9)$$

Dies führt zu der Schrödinger-Gleichung in der E-Eichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^E(\vec{r}, t) = (H_0 + H_E(t)) \Psi^E(\vec{r}, t) \quad (2.10)$$

mit der elektrischen Dipol-Wechselwirkung $\vec{E} \cdot \vec{r}$

$$H_E(t) = - e \vec{E}(t) \cdot \vec{r} . \quad (2.11)$$

Die Eichtransformation (2.3) und (2.4), die von der R-Eichung in die E-Eichung führt, ist gegeben durch

$$\chi_{R \rightarrow E}(\vec{r}, t) = - \vec{A}(t) \cdot \vec{r} = \vec{r} \int_{-\infty}^t \vec{E}(t') dt'. \quad (2.12)$$

Diese Transformation wurde bereits 1931 erstmals verwendet /51/.

Zur Vervollständigung der Notation wollen wir noch die Eigenwerte und Eigenzustände des ungestörten Hamilton-Operators H_0

$$H_0 \varphi_n^0(\vec{r}) = E_n \varphi_n^0(\vec{r}) \quad (2.13)$$

und die stationären Lösungen

$$\Phi_n^0(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \varphi_n^0(\vec{r}) \quad (2.14)$$

der feldfreien Schrödinger-Gleichung

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi^0(\vec{r}, t) = H_0 \Phi^0(\vec{r}, t) \quad (2.15)$$

einführen.

2.2 Nichtwechselwirkende Zustände

Unter nicht-wechselwirkenden Teilchen verstehen wir gebundene Teilchen, deren Zustand durch ein äußeres elektromagnetisches Feld praktisch nicht beeinflusst wird, da auch bei intensiven Feldern die Wechselwirkungsenergie sehr klein ist gegen die Bindungsenergie. Hierzu zählen beispielsweise, wie wir später sehen werden, Nukleonen in einem Atomkern, der einem Laserfeld ausgesetzt wird, oder gebundene Elektronen in der Atomhülle unter dem Einfluß eines Radiofeldes. Die Eichvarianz und die daraus folgende Ladungserhaltung verlangen, daß alle geladenen Teilchen an das äußere Feld gekoppelt werden - also auch diejenigen, von denen man annimmt, daß sie durch das äußere Feld nicht beeinflusst werden. Die korrekte Form der Wellenfunktion nichtwechselwirkender Teilchen bei Anwesenheit eines äußeren Feldes wird in Kap. IV eine zentrale Rolle spielen. Wir werden dort sehen, daß der nukleare Betazerfall, bei dem ja

die Kernladungen im Anfangs- und Endzustand verschieden sind, ein gutes Beispiel dafür ist, daß man eichabhängige und damit falsche Ergebnisse erhält, wenn man die nicht-wechselwirkenden Teilchen nicht an das äußere Feld koppelt. Wir wollen daher in diesem Abschnitt die Wellenfunktionen nichtwechselwirkender Teilchen in einem äußeren Feld ausführlich ableiten und begründen.

Die Lösung dieser Frage ist eng verwandt mit einem anderen Problem, das in der Quantenoptik wesentlich bekannter ist: dem Problem, wie man mit den beiden Wechselwirkungen $H_R(2.8)$ und $H_E(2.11)$ dieselben Übergangsraten berechnen kann. Wir wollen uns zuerst diesem Problem zuwenden.

Obwohl die beiden Wechselwirkungen $H_R(2.8)$ und $H_E(2.11)$ über die Eichtransformation (2.12) miteinander verbunden sind, wird häufig die Auffassung vertreten, sie führten zu verschiedenen Ergebnissen für meßbare physikalische Größen (siehe z.B. Ref. 52; für jüngere Veröffentlichungen siehe Ref. 50), da ihre Übergangsmatrixelemente verschieden sind. Wir wollen dieses Argument kurz am Beispiel einer linear polarisierten, monochromatischen ebenen Welle mit Frequenz ω vorführen. Das elektrische Feld $\vec{E}(t)$ und das zugehörige Vektorpotential $\vec{A}(t)$ in der R-Eichung haben dann die Form

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \sin \omega t, \quad \vec{A}(t) = \vec{a} \cos \omega t, \quad \vec{a} = \frac{1}{\omega} \vec{E}_0.$$

In der Resonanznäherung ("rotating wave approximation") können wir die Wechselwirkungen H_R und H_E schreiben als

$$H_E(t) = -\frac{i}{2} e \vec{E}_0 \vec{r} e^{-i\omega t}, \quad H_R(t) = -\frac{1}{2} \frac{e}{m} \vec{a} \vec{p} e^{-i\omega t}.$$

Der $\vec{A}^2$ -Term in H_R wurde weggelassen, da er in der Dipol-Näherung keine Übergänge zwischen verschiedenen Niveaus induzieren kann. Unter Verwendung der Operatorbeziehung

$$[\vec{r}, H_0] = i\hbar \frac{\vec{p}}{m}$$

erhält man für die Übergangsmatrixelemente von H_E und H_R zwischen Eigenzuständen $|p_i^0\rangle$ und $|p_f^0\rangle$ (2.13) des ungestörten Hamiltonoperators H_0 das Verhältnis

$$\frac{\langle \psi_i^0 | H_R | \psi_j^0 \rangle}{\langle \psi_i^0 | H_E | \psi_j^0 \rangle} = \frac{E_j - E_i}{\hbar \omega} \quad (2.16)$$

Die Matrixelemente unterscheiden sich also um das Verhältnis zwischen Übergangsenergie und Photonenenergie.

Häufig wird aus Gl. (2.16) geschlossen, daß sich auch physikalische Größen wie die Übergangsrate in den verschiedenen Eichungen um das Verhältnis (2.16) unterscheiden. Üblicherweise entwickelt man in zeitabhängiger Störungstheorie die Lösungen ψ^R und ψ^E der Schrödinger-Gleichungen (2.6) und (2.10) im Wechselwirkungsbild nach demselben vollständigen Satz von Eigenzuständen ϕ_n^0 (2.14) des ungestörten Hamiltonoperators H_0

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n(t) \bar{\phi}_n^0(\vec{r}, t) \quad (2.17)$$

Die Bewegungsgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten c_n erhält man durch Einsetzen der Entwicklung (2.17) in die entsprechenden Schrödinger-Gleichungen. Die Größen

$$|c_n(t)|^2 = |\langle \bar{\phi}_n^0(t) | \psi(t) \rangle|^2 \quad (2.18)$$

unterscheiden sich bei Verwendung der Wechselwirkungen H_R und H_E um Faktoren der Form (2.16), wie man durch Lösung der Bewegungsgleichungen leicht nachprüfen kann.

Üblicherweise werden die Größen (2.18) als die meßbaren physikalischen Übergangswahrscheinlichkeiten angesehen. Falls dies korrekt ist, würden die beiden Wechselwirkungen $\vec{p}\vec{A}$ und $\vec{E}\vec{r}$ tatsächlich verschiedene physikalische Ergebnisse liefern. Wenn in den Bewegungsgleichungen für c_n noch phänomenologische Strahlungsdämpfungsterme zur Berücksichtigung der spontanen Emission eingeführt werden, was in der Quantenoptik und insbesondere in der Lasertheorie häufig geschieht /26/, gilt diese Aussage auch für den Grenzfall $t \rightarrow \infty$, da in diesem Fall aufgrund der Energieunschärfe der Niveaus nichtresonante Übergänge erlaubt sind.

1952 fand Lamb bei der Untersuchung des Wasserstoffspektrums, daß bei der oben beschriebenen Methode nur die $\vec{E}\vec{r}$ -Wechselwirkung zu Übereinstimmung

mit dem Experiment führt /53/. Seit dieser Zeit hat die eigentlich elementare Frage, wie eichunabhängige Übergangsraten zu gewinnen sind, einige Verwirrung ausgelöst.

Zum Verständnis dieser Frage hat das Erscheinen des Lehrbuchs von Cohen-Tannoudji et al. /54/ wesentlich beigetragen. Hier wurde die sehr nützliche Unterscheidung zwischen "echt-physikalischen" und "nicht-physikalischen" Größen eingeführt. Echt-physikalische Größen sind dadurch definiert, daß der entscheidende Operator $G^g \equiv G(\vec{A}^g, U^g)$ form-invariant bezgl. der unitären Transformation (2.4) ist:

$$G^{g'} = T G^g T^\dagger. \quad (2.19)$$

Man erhält den Operator in der Eichung g' also entweder durch die Substitution (2.3) der Potentiale oder durch Anwendung der Transformation T (2.4). Man entnimmt aus der Definition (2.19) sofort, daß nur für echt-physikalische Größen die Eigenwerte eichunabhängig sind. Nicht-physikalische Größen haben dagegen in jeder Eichung einen anderen Eigenwert, beschreiben also - Eichinvarianz vorausgesetzt - keine physikalischen Meßgrößen, sondern sind reine mathematische Hilfsgrößen.

Echt-physikalische Größen bilden nur eine Teilmenge der Observablen. Observablen sind dadurch definiert, daß der entsprechende Operator hermitisch ist und einen vollständigen Satz von Eigenfunktionen besitzt. Seine Eigenwerte sind reell. Wie die folgenden Beispiele zeigen, können diese reellen Eigenwerte jedoch sehr wohl eichabhängig sein. In diesem Fall stellt eine Observable keine meßbare, echt-physikalische Größe dar.

Wir wollen für die Operatoren, die in diesem Abschnitt von Bedeutung sind, kurz feststellen, ob sie zur Kategorie der echt-physikalischen oder nicht-physikalischen Größen gehören. Ausgangspunkt dazu ist die Tatsache, daß die Operatoren der Ortskoordinate und des verallgemeinerten oder kanonischen Impulses

$$\hat{\vec{r}} = \vec{r}, \quad \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

(hier in der Ortsdarstellung angegeben) in allen Eichungen dieselbe Form haben. Dann ist leicht einzusehen, daß der Ortsoperator $\vec{r}$ eine

echt-physikalische Größe ist, genauso wie der mechanische oder kinetische Impuls

$$\vec{\pi}^g = \vec{p} - e\vec{A}^g(\vec{r}, t), \quad (2.20)$$

der Energieoperator des Systems, bestehend aus der kinetischen Energie und dem statischen Potential

$$\epsilon^g = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A}^g(\vec{r}, t))^2 + V(\vec{r}), \quad (2.21)$$

oder der Operator

$$F^g = eU^g(\vec{r}, t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}.$$

Aus der Formvarianz von ϵ^g und F^g folgt sofort die Forminvarianz der Schrödinger-Gleichung (2.1). Ganz allgemein repräsentieren Operatoren, die nur über die Größen $\vec{\pi}^g$ oder F^g von den Potentialen und Differentialoperatoren abhängen, echt-physikalische Größen. Diese Operatoren müssen in verschiedenen Eichungen unterschiedliche analytische Form haben, um eichunabhängige Eigenwerte zu gewährleisten. Andererseits sind weder der kanonische Impuls $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, noch der Operator $i\hbar \partial/\partial t$ noch das Vektor- und das skalare Potential $\vec{A}^g$ und U^g echt-physikalische Größen. Daraus folgt, daß auch der ungestörte Hamiltonoperator H_0 (2.7) sowie der totale Hamiltonoperator

$$H^g = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A}^g(\vec{r}, t))^2 + V(\vec{r}) + eU^g(\vec{r}, t)$$

der Schrödinger-Gleichung (2.1) nicht-physikalische Größen sind. Allgemein gilt dies für jeden Operator, der von nicht-physikalischen Größen wie den Potentialen oder den Differentialoperatoren separat anstatt über die Kombination $\vec{\pi}^g$ oder F^g abhängt. Entsprechend ist auch die Aufspaltung des Hamiltonoperators in den Schrödinger-Gleichungen (2.6) und (2.10) nach einem ungestörten Anteil H_0 und einem Wechselwirkungsanteil H_R bzw. H_E nicht eichinvariant. Es bleibt festzuhalten, daß die Hamiltonoperatoren H_0 und H^g , die die Zeitentwicklung des physikalischen Systems bestimmen, normalerweise keine meßbaren physikalischen Größen darstellen, wohl aber beispielsweise die Energie ϵ^g des Systems oder der mechanische Impuls $\vec{\pi}^g$.

In einem Experiment kann nur der eichunabhängige Eigenwert g_n einer echt-physikalischen Größe G^g

$$G^g |\xi_n^g\rangle = g_n |\xi_n^g\rangle$$

gemessen werden. Es ist eins der grundlegenden Postulate der Quantenmechanik, daß die Wahrscheinlichkeit, in einem System, das durch die Lösung $|\psi^g\rangle$ der Schrödinger-Gleichung (2.1) beschrieben wird, den Eigenwert g_n der echt-physikalischen Größe G^g zu messen, gegeben ist durch

$$P_n = |\langle \xi_n^g | \psi^g \rangle|^2.$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist offensichtlich eichinvariant. Um also die Koeffizienten einer Entwicklung der Wellenfunktion ψ^g wie in Gl. (2.17) als Wahrscheinlichkeitsamplituden interpretieren zu können, muß ψ^g nach einen vollständigen Satz von Eigenzuständen derjenigen physikalischen Größe G^g entwickelt werden, durch die der Endzustand bestimmt werden soll. Für ein freies Teilchen kann G^g beispielsweise der mechanische Impuls $\vec{\pi}^g$ sein. Wir sind hier an einem gebundenen Teilchen interessiert, dessen Zustand durch ein äußeres Feld gestört wird. Vor Einschalten der Störung ist sein Zustand durch einen Energieeigenwert E_i charakterisiert, und wir suchen die Wahrscheinlichkeit, das System aufgrund der Wechselwirkung mit dem äußeren Feld in einem Energie-Eigenzustand zu finden, der durch den Eigenwert E_n charakterisiert ist. In diesem Fall ist für G^g der Eigenoperator ϵ^g (2.21) zu wählen /55/.

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit P_n benötigen wir die Eigenzustände von ϵ^g . Der Energieoperator ϵ^g ist in der E-Eichung identisch mit dem ungestörten Hamiltonoperator H_0 , $\epsilon^E = H_0$. Die Eigenwerte und Eigenzustände von ϵ^E sind demnach durch Gl. (2.13) gegeben. In einer beliebigen Eichung g haben sie die Form

$$\epsilon^g(t) \varphi_n^g(\vec{r}, t) = E_n \varphi_n^g(\vec{r}, t) \quad (2.22)$$

mit

$$\varphi_n^g(\vec{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \chi_{E \rightarrow g}(\vec{r}, t)} \varphi_n^0(\vec{r}). \quad (2.23)$$

Im Wechselwirkungsbild benötigen wir die Wellenfunktionen

$$\bar{\Phi}_n^g(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \varphi_n^g(\vec{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \chi_{E \rightarrow g}(\vec{r}, t)} \bar{\Phi}_n^0(\vec{r}, t). \quad (2.24)$$

Man beachte, daß die Existenz der E-Eichung, d.h. der Eichung mit $\vec{A}^g = 0$, auf der Dipol-Näherung beruht. Ohne Dipolnäherung können die Eigenzustände φ_n^g von ϵ^g nicht mehr mit den in praktischen Rechnungen normalerweise bekannten Eigenzuständen φ_n^0 des ungestörten Hamiltonoperators H_0 in Verbindung gebracht werden. Außerdem wären die Eigenwerte von ϵ^g dann genauso zeitabhängig wie der Operator ϵ^g und seine Eigenzustände φ_n^g . Nur in der Dipolnäherung sind die eichinvarianten Eigenwerte E_n von ϵ^g zeitunabhängig und stimmen mit dem meßbaren Energiespektrum des Systems in Abwesenheit der äußeren Felder überein, so daß ϵ^g die geeignete Wahl für die physikalische Größe G^g ist.

Im Fall der R-Eichung stimmt der Energieoperator ϵ^g mit dem totalen Hamiltonoperator überein, $\epsilon^R = H_0 + H_R$. H_0 und ϵ^R haben dieselben Eigenwerte E_n , ihre Eigenzustände unterscheiden sich aber

$$\varphi_n^R(\vec{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{A}(t) \cdot \vec{r}} \varphi_n^0(\vec{r}). \quad (2.25)$$

Obwohl die Wellenfunktionen $\varphi_n^R(\vec{r}, t)$ Eigenzustände von $H_0 + H_R(t)$ sind, sind die zugehörigen Funktionen

$$\bar{\Phi}_n^R(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \varphi_n^R(\vec{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{A}(t) \cdot \vec{r}} \bar{\Phi}_n^0(\vec{r}, t) \quad (2.26)$$

keine Lösungen der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung (2.6), da aufgrund der Zeitabhängigkeit des Hamiltonoperators auch die Eigenzustände zeitabhängig sind.

Um die Entwicklungskoeffizienten als Wahrscheinlichkeitsamplituden für Übergänge in Energieeigenzustände zu interpretieren, muß die Lösung ψ^g der Schrödinger-Gleichung (2.1) im Wechselwirkungsbild nach den Wellenfunktionen Φ_n^g (2.24) entwickelt werden

$$\Psi^g(\vec{r}, t) = \sum_n a_n(t) \bar{\Phi}_n^g(\vec{r}, t). \quad (2.27)$$

Die Größen

$$|a_n(t)|^2 = |\langle \Phi_n^g(t) | \Psi^g(t) \rangle|^2 \quad (2.28)$$

sind nun durch Konstruktion eichunabhängige Übergangswahrscheinlichkeiten, im Gegensatz zu den Koeffizienten $|c_n(t)|^2$ (2.18). Durch Einsetzen von Gl. (2.27) in die Schrödinger-Gleichungen (2.6) und (2.10) kann man auch explizit nachweisen, daß die beiden Wechselwirkungen H_R und H_E trotz Gl. (2.16) zu denselben Bewegungsgleichungen für die Amplituden $a_n(t)$ und damit zu denselben physikalischen Ergebnissen führen. Nur in der E-Eichung stimmt der ungestörte Hamiltonoperator H_0 mit dem Energieoperator ϵ^g und damit die Basis $\{\phi_n^0\}$ in Gl. (2.17) mit der Basis $\{\phi_n^g\}$ in Gl. (2.27) überein. Damit sind nur bei der $\vec{E}$ -Wechselwirkung die Entwicklungskoeffizienten c_n in Gl. (2.17) physikalische Übergangsamplituden, in Übereinstimmung mit Ref. 53. In allen anderen Eichungen ist H_0 eine nicht-physikalische Größe, seine Eigenzustände ϕ_n^0 sind nicht die Energieeigenzustände des Systems, und die Entwicklungskoeffizienten c_n liefern die eichabhängige "Wahrscheinlichkeit", das System in einem Eigenzustand der mathematischen Hilfsgröße H_0 zu finden. Um die eichunabhängige Wahrscheinlichkeit $|a_n|^2$ zu erhalten, das System in einem Energie-Eigenzustand zu finden, muß auch die Basis, in der ψ^g entwickelt wird, der Eichtransformation unterworfen werden. Natürlich ist von einem mathematischen Standpunkt die Entwicklung (2.17) völlig korrekt, doch muß dann die Beziehung zwischen den Entwicklungskoeffizienten $|c_n|^2$ und den experimentell meßbaren Übergangswahrscheinlichkeiten $|a_n|^2$ bestimmt werden.

Die Tatsache, daß die experimentell zugänglichen Übergangsamplituden durch Gl. (2.28) statt durch Gl. (2.18) gegeben sind, mag überraschend sein. Schließlich wird in vielen Gebieten der Physik einschließlich der Kernphysik die Entwicklung (2.17) verwendet, obwohl die Materie-Feld-Wechselwirkung nicht in der E-Eichung beschrieben wird. Tatsächlich stimmen die Größen $|c_n^g(t)|^2$ (2.18) und $|a_n(t)|^2$ (2.28) auch in der R-Eichung für die meisten Situationen von physikalischem Interesse überein. Dies gilt für den Fall, daß das System vor Einschalten des äußeren Feldes $\vec{E}(t)$ präpariert und die Messung erst nach Abschalten des Feldes durchgeführt wird. Man sieht dies aus der Beziehung zwischen c_n^g und a_n :

$$c_n^g(t) = \sum_w a_w(t) \langle \Phi_n^0(t) | e^{\frac{i}{\hbar} \vec{A}(t) \cdot \vec{r}} | \Phi_w^0(t) \rangle.$$

Sobald das Vektorpotential verschwindet, stimmen die Wahrscheinlichkeiten c_n^g und a_n überein. Das Vektorpotential verschwindet für alle Wellenpakete im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ /56/. Für ebene monochromatische Wellen gilt dies zunächst nicht. Doch erhält man für ebene Wellen im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ eine Deltafunktion, die die Energieerhaltung gewährleistet. Übergänge finden nur statt, wenn die Energiedifferenz $E_f - E_i$ zwischen Anfangs- und Endzustand ein ganzzahliges Vielfaches der Photonenenergie $\hbar\omega$ ist. Unter Ausnutzung dieser Energieerhaltung kann man zeigen, daß die Wahrscheinlichkeiten $|c_n^R|^2$ und $|a_n|^2$ in der R-Eichung auch für ebene Wellen im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ übereinstimmen. Für die erste Ordnung Störungstheorie ist dies gemäß Gl. (2.16) trivial. Für Zwei-Photonen-Prozesse wurde dies in Ref. 57 und 58 gezeigt, für Multiphoton-Prozesse beliebiger Ordnung in Ref. 59. Nur bei phänomenologischer Berücksichtigung der spontanen Emission in den Bewegungsgleichungen für die Übergangsamplituden sind auch bei ebenen Wellen im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ "nichtresonante" Prozesse möglich. Dann unterscheiden sich c_n^g und a_n auch im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ und nur die Wahrscheinlichkeiten $|a_n|^2$ liefern das korrekte Ergebnis. Der ganze Fragenkomplex, wie mit den verschiedenen Wechselwirkungen dieselben physikalischen Meßgrößen berechnet werden, führte in den letzten fünf Jahren zu einer ganzen Flut von Veröffentlichungen (für eine Übersicht siehe Ref. 50).

Wir wollen nun auf die ursprüngliche Frage dieses Abschnittes zurückkommen, wie nichtwechselwirkende Zustände in verschiedenen Eichungen zu definieren sind. Normalerweise wäre man versucht, einfach die Potentiale $\vec{A}^g$ und U^g in der Schrödinger-Gleichung (2.1) gleich Null zu setzen. Damit wären die nichtwechselwirkenden Zustände in jeder beliebigen Eichung durch die Eigenzustände φ_n^0 des ungestörten Hamiltonoperators H_0 gegeben. Von einem physikalischen Standpunkt ist es jedoch sinnvoll, nichtwechselwirkende Zustände in einem äußeren Feld nicht durch Wellenfunktionen zu beschreiben, die feldunabhängig sind, sondern durch Wellenfunktionen, die Eigenzustände einer echt-physikalischen Größe sind, deren meßbare Eigenwerte feldunabhängig sind. In der R-Eichung werden die nichtwechselwirkenden Zustände also durch die Eigenzustände φ_n^R (2.25) bzw. ϕ_n^R (2.26) des Energieoperators ϵ^R beschrieben. In einem Zustand ϕ_n^R hat das System auch bei eingeschaltetem Feld immer die ungestörte Energie E_n . Die Wellenfunktionen φ_n^0 beschreiben dagegen einen Zustand mit zeitabhängiger Energie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \varphi_n^0 | \varepsilon^R | \varphi_n^0 \rangle &= \langle \varphi_n^0 | -\frac{i}{\hbar} [\varepsilon^R, H_0 + H_R] + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^R | \varphi_n^0 \rangle \\ &= \langle \varphi_n^0 | \frac{e}{m} (\vec{p} - e\vec{A}) \vec{E} | \varphi_n^0 \rangle = -\frac{e^2}{m} \vec{A}(t) \vec{E}(t) \neq 0. \end{aligned}$$

Ein weiteres sehr einfaches Gegenbeispiel dafür, daß die Wellenfunktion φ_n^0 in der R-Eichung keinen feldfreien Zustand beschreiben kann, ist das Verhalten des Eigenwerts des mechanischen Impulses $\vec{\pi} = m\vec{v}$. In der R-Eichung hat der zugehörige Operator die Gestalt $\vec{\pi}^R = \vec{p} - e\vec{A}^R(t) = -i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A}(t)$. Der Erwartungswert der Geschwindigkeit ist in dem Zustand φ_n^R unabhängig vom äußeren Feld, wie es für einen nichtwechselwirkenden Zustand sein muß:

$$\langle \varphi_n^R | \vec{v}^R | \varphi_n^R \rangle = \frac{1}{m} \langle \varphi_n^R | -i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A} | \varphi_n^R \rangle = \frac{1}{m} \langle \varphi_n^0 | \vec{p} | \varphi_n^0 \rangle.$$

Falls in der R-Eichung der Zustand dagegen durch φ_n^0 gegeben ist, ist seine Geschwindigkeit durch das äußere Feld beeinflusst:

$$\langle \varphi_n^0 | \vec{v}^R | \varphi_n^0 \rangle = \frac{1}{m} \langle \varphi_n^0 | \vec{p} | \varphi_n^0 \rangle - \frac{e}{m} \vec{A}(t).$$

Es mag auf den ersten Blick verblüffend sein, daß die Wellenfunktionen φ_n^R bzw. ϕ_n^R ungestörte Zustände beschreiben, obwohl sie vom Vektorpotential $\vec{A}$ abhängen. Die ungestörten Eigenzustände φ_n^g müssen jedoch genauso wie der Operator ε^g aufgrund von Gl. (2.3) und (2.4) in jeder Eichung eine andere feldabhängige analytische Gestalt haben, um eichinvariante, feldunabhängige Energieeigenwerte E_n zu gewährleisten. Nur in der E-Eichung stimmen sie mit den feldunabhängigen Eigenzuständen φ_n^0 von H_0 überein, da die E-Eichung die sog. "bevorzugte Eichung" /56/ ist, in der kanonischer und mechanischer Impuls identisch sind.

2.3 Atomkern im äußeren Feld

Für die Beschreibung der Kernzustände legen wir das Schalenmodell zugrunde. Der Kern bestehe aus einem stabilen Rumpf mit Spin und Parität 0^+ , der von dem Zerfallsprozeß unbeeinflusst bleibt, sowie aus einem oder mehreren Valenznukleonen, die zu Kernspin und -parität I^π koppeln. Unter diesen Valenznukleonen befindet sich das Teilchen, das für den Kernzerfall - beispielsweise den Betazerfall - verantwortlich ist.

Die Bestimmung der Kernzustände im äußeren Feld ist damit reduziert auf das Zwei-Körper-Problem im äußeren Feld für den Rumpf und die Gesamtheit der Valenznukleonen. Im folgenden soll vorgeführt werden, wie sich Schwerpunkts- und Relativbewegung im äußeren Feld separieren lassen. Wir wählen dazu die Schrödinger-Gleichung (2.10) in der E-Eichung. Für gebundene Zustände ist die $\vec{E}\vec{r}$ -Wechselwirkung der E-Eichung normalerweise bequemer als die $\vec{p}\vec{A}$ -Wechselwirkung /58/, numerische Abschätzungen sind einfacher und es gibt keinerlei Probleme mit der Interpretation, wie im letzten Abschnitt erläutert. Die folgenden Rechnungen können jedoch in strikter Analogie auch für die Schrödinger-Gleichung (2.6) in der R-Eichung ausgeführt werden /60/.

In der E-Eichung hat die Schrödinger-Gleichung für ein Zwei-Teilchen-System in einem äußeren Feld $\vec{E}(t)$ die Form

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^E(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \left\{ \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} - e_1 \vec{E}(t) \vec{r}_1 - e_2 \vec{E}(t) \vec{r}_2 + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \right\} \Psi^E(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t). \quad (2.29)$$

Die Indices 1 und 2 beziehen sich auf die Valenzteilchen und den Rumpf. Das Kern- und Coulombpotential zwischen beiden Fragmenten wird der Einfachheit halber durch ein Zentralpotential $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ berücksichtigt. Durch Einführung von Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2,$$

Schwerpunkts- und Relativimpulsen

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad \vec{p} = \frac{m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2}{m_1 + m_2},$$

totaler und reduzierter Masse

$$M = m_1 + m_2, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

sowie totaler und reduzierter Ladung

$$Q = e_1 + e_2, \quad e = \frac{m_2 e_1 - m_1 e_2}{m_1 + m_2}$$

kann Gl. (2.29) umgeschrieben werden zu

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^E(\vec{R}, \vec{r}, t) = \left\{ \frac{1}{2M} \vec{P}^2 + \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - Q\vec{E}(t)\vec{R} - e\vec{E}(t)\vec{r} + V(|\vec{r}|) \right\} \Psi^E(\vec{R}, \vec{r}, t). \quad (2.30)$$

Offensichtlich ist Gl. (2.30) separabel in einen Anteil, der die Schwerpunktsbewegung beschreibt, und einen Anteil für die Relativbewegung (für Fragen der Separierbarkeit der Schrödinger-Gleichung in verschiedenen Eichungen siehe Ref. 60):

$$\Psi^E(\vec{R}, \vec{r}, t) = \Psi_S^E(\vec{R}, t) \Psi_r^E(\vec{r}, t).$$

Die Schrödinger-Gleichung für die Relativbewegung hat die Gestalt

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_r^E(\vec{r}, t) = \left\{ \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(|\vec{r}|) - e\vec{E}(t)\vec{r} \right\} \Psi_r^E(\vec{r}, t). \quad (2.31)$$

Ungewohnt an Gl. (2.31) ist das Auftreten der reduzierten Ladung e . Für ein Wasserstoffatom hat die reduzierte Ladung die gewohnte Einheit $e = -e_0$. Bei einem Kern treten jedoch rationale Verhältnisse der Elementarladung auf. Die Zahl der Neutronen und Protonen im Rumpf und im Valenzfragment sei mit N_R und Z_R bzw. N_V und Z_V bezeichnet, die Massenzahl des Kerns mit $A = Z_R + Z_V + N_R + N_V$. Dann koppelt die Relativbewegung über die Ladung

$$e = e_0 \frac{N_R Z_V - N_V Z_R}{A} \quad (2.32)$$

an das äußere Feld. Bei Protonenüberschuß unter den Valenzteilchen ist e positiv, bei Neutronenüberschuß negativ. Falls der Kern nur ein Valenz-

proton besitzt, ist $e = e_0 N_R / A \approx e_0 / 2$, bei einem Valenzneutron $e = -e_0 Z_R / A \approx -e_0 / 2$. Die Relativbewegung von 2 Neutronen koppelt also mit näherungsweise derselben Stärke an ein äußeres Feld wie ein Antiproton. Falls sowohl der Rumpf als auch das Valenzfragment dieselbe Anzahl von Protonen und Neutronen besitzen, ist die Relativbewegung vom äußeren Feld unbeeinflusst. Falls bei einem β^- -Zerfall eines der Valenzneutronen in ein Valenzproton zerfällt, unterscheiden sich die reduzierten Ladungen im Anfangs- und Endzustand um

$$e_i - e_f = -e_0 \frac{N_R + Z_R}{A} \stackrel{!}{=} e_{\text{electron}} \quad (2.33)$$

Da in der nichtrelativistischen Theorie keine Massen erzeugt werden können, müssen wir die Verletzung der Massenerhaltung "von Hand" in die Theorie einführen, dann aber die Ladungserhaltung sicherstellen. Die Elektronenladung muß gleich der Ladungsdifferenz der Kernzustände sein, wie dies im zweiten Teil von Gl. (2.33) postuliert wurde. Die effektive Elektronenladung ist also etwas kleiner als die Elementarladung. Zur exakten Beschreibung des Endzustandes müßte eigentlich ein Dreikörperproblem für Rumpf, Valenzfragment und Elektron untersucht werden. Für die Rechnungen in den nächsten Kapiteln ist jedoch die Bedingung der Ladungserhaltung (2.33) ausreichend.

Zur Bestimmung der Lösungen der Einteilchen-Bewegungsgleichung (2.31) ist es nützlich, die Größenordnungen der verschiedenen Terme miteinander zu vergleichen. Wir betrachten zuerst den Kern-Feld-Wechselwirkungsterm $-e\vec{E}r$. Die Valenzteilchen sind auch im äußeren Feld im wesentlichen auf das Kernvolumen beschränkt, so daß r in der Größenordnung von $1\text{fm} = 10^{-13}\text{ cm}$ ist. Damit wird der Wechselwirkungsterm noch überschätzt, denn elektrische Dipolmomente dieser Größenordnung treten nur bei Riesenresonanzen auf. Dazu sind jedoch Anregungsenergien von 15 - 30 MeV notwendig, während wir hier nur an Multiphoton-Anregung sehr niedrig liegender Zustände denken. Für ein Laserfeld mit $E_0 = 10^{10}\text{ V/cm}$ oder ein Radiofeld mit $E_0 = 10^4\text{ V/cm}$ ist die Nukleon-Feld-Wechselwirkungsenergie in der Größenordnung von 10^{-9} MeV bzw. 10^{-15} MeV . Dies ist zu vergleichen mit dem Kernbindungspotential $V(r)$, das in der Größenordnung MeV liegt. $V(r)$ enthält außerdem das Coulombpotential, das sich am Kernrand ebenfalls im MeV-Bereich bewegt. Beispielsweise beträgt für ein Proton, das mit einem Rumpf mit $Z_R = N_R = 10$ wechselwirkt, das Coulomb-Potential am Kernrand etwa 4 MeV. Verglichen mit dem Bindungspotential $V(r)$ ist die

Kern-Feld-Wechselwirkung $-e\vec{E}\vec{r}$ völlig vernachlässigbar. Um Feldeffekte auf ein gebundenes Nukleon zu erzielen, bedarf es Feldstärken, die mindestens mit der kritischen Feldstärke des Elektrons $E_c = 1.3 \times 10^{16}$ V/cm (1.2) vergleichbar sind. Im Labor erzeugbare Felder sind um viele Größenordnungen kleiner. Ausnahmen bestünden nur, wenn zufälligerweise der Energieabstand zwischen zwei Niveaus eines Kerns oder zwischen Anfangs- und Endzustand zweier verschiedener Kerne bei einem Zerfallsprozeß in der Größenordnung der Kern-Feld-Wechselwirkungsenergie liegen würde.

Zum Vergleich der Größenordnungen wollen wir Gl. (2.31) für den Fall eines Valenzelektrons in einem Atom betrachten. Der Radius des Atoms ist um etwa fünf Größenordnungen größer als der des Kerns, die atomaren Bindungsenergien um bis zu fünf Größenordnungen kleiner als die nuklearen. Zur Beeinflussung von in einem Atom gebundenen Elektronen reichen also um grob 10^{-10} geringere Feldstärken aus als zur Beeinflussung von Kernzuständen.

In Anbetracht der verschiedenen Größenordnungen kann die Wechselwirkung mit dem äußeren Feld in der Schrödinger-Gleichung (2.31) vernachlässigt werden. Die Lösungen ψ_r^E sind dann durch die Lösungen ϕ_n^0 (2.14) der feldfreien Schrödinger-Gleichung (2.15) gegeben. Die Funktionen ϕ_n^0 sind die üblichen feldfreien Einteilchen-Kernwellenfunktionen. Um die vom äußeren Feld unbeeinflussten Kernzustände ψ_r^g in einer anderen Eichung g zu erhalten, muß die Eichtransformation (2.4) auf die Kernwellenfunktion angewandt werden. In der R-Eichung sind dann die Kernwellenfunktion ψ_v^R die ungestörten Wellenfunktionen ϕ_n^R (2.26).

2.4 Näherungsmethoden für gebundene Zustände im äußeren Feld

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß auch bei den intensivsten, experimentell erzeugbaren Feldern die Wechselwirkungsenergie zwischen einem Nukleon im Kern und dem Feld sehr klein ist gegen die Bindungsenergie des Nukleons. Daraus haben wir geschlossen, daß die Wechselwirkung zwischen dem Kern und dem äußeren Feld vernachlässigt werden kann. Diese Frage ist jedoch nicht unumstritten. So soll die in Ref. 19 vorhergesagte feldbedingte Aufhebung von Auswahlregeln auf der Wechselwirkung zwischen Kern und Feld beruhen. Es ist nicht a priori ausgeschlossen,

daß auch eine kleine, zeitlich langsam veränderliche Störung im Kern zu Übergängen führen kann. Da wir uns auf die Wechselwirkung mit einem langwelligen intensiven Feld beschränken, benötigen wir zur Klärung dieser Frage nicht-störungstheoretische Lösungsmethoden für die Schrödinger-Gleichung (2.31), die die Wechselwirkung mit dem äußeren Feld zumindest näherungsweise in beliebiger Ordnung berücksichtigen. Keine der im folgenden zu diskutierenden Methoden wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwendet werden. Sie dienen nur als Rechtfertigung für unsere Näherung, die Wechselwirkung zwischen Kern und Feld zu vernachlässigen. Andererseits haben sie eine wesentlich allgemeinere Bedeutung: die Behandlung gebundener Systeme unter dem Einfluß langwelliger Felder spielt nicht nur beim feldinduzierten Betazerfall, sondern vor allem auch bei der Multiphoton-Ionisation von Atomen eine Rolle.

Wir wollen in diesem Abschnitt vor allem auf die sog. "momentum translation approximation" (MTA-Methode) eingehen, da diese Methode in Ref. 19 verwendet wird und bei der Theorie des verbotenen Betazerfalls im äußeren Feld in Kap. IV eine wichtige Rolle spielen wird. Bei dieser Methode wird versucht, mit Hilfe einer geschickten unitären Transformation der Schrödinger-Gleichung (2.1) den Hauptanteil der Teilchen-Feld-Wechselwirkung zu separieren, so daß die Wellengleichung für die transformierte Wellenfunktion wieder störungstheoretisch behandelt werden kann. Derselbe Trick in einer etwas modifizierten Form wird auch bei einem zweiten Verfahren angewandt, das in diesem Zusammenhang häufig erwähnt wird: der "space translation approximation" (STA-Methode). Die Anwendbarkeit dieser Methode soll ebenfalls kurz diskutiert werden. In einem dritten Punkt soll skizziert werden, wie die Teilchen-Feld-Wechselwirkung im Prinzip exakt berücksichtigt werden kann. Wir werden dann eine numerische Modellrechnung referieren, die zwar für Multiphoton-Ionisation von Atomen ausgeführt wurde, aus der man jedoch auch entnehmen kann, daß Multiphoton-Anregung von Atomkernen bei den heute verfügbaren Feldstärken praktisch ausgeschlossen ist. Zum Schluß wollen wir noch ein adiabatisches Näherungsverfahren erwähnen, mit dem man speziell die Einflüsse langwelliger Felder berücksichtigen kann.

Die MTA-Methode wurde spezifisch für die R-Eichung entwickelt /61/. Ausgehend von der Schrödinger-Gleichung (2.6) wird die Wellenfunktion ψ^R in der folgenden Form angesetzt:

$$\Psi^R(\vec{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{A}(t) \cdot \vec{r}} \chi(\vec{r}, t). \quad (2.34)$$

Dieser Ansatz hat exakt dieselbe Gestalt wie die Eichtransformation (2.4) und (2.12) für die Wellenfunktion. Entsprechend hat die Bewegungsgleichung für χ die Form (2.10). In Ref. 61 wird jedoch davon ausgegangen, daß Gl. (2.34) keine Eichtransformation darstellt, d.h. auch nach der Transformation (2.34) sind Vektor- und skalares Potential weiterhin durch $(\vec{A}, 0)$ gegeben. (Zum Vergleich: auch bei einer Eichtransformation der Gestalt (2.34) erhält man für χ die Bewegungsgleichung (2.10). Zusätzlich werden jedoch auch die Potentiale transformiert, so daß nach einer Eichtransformation die Potentiale durch $(0, -\vec{E}r)$ gegeben sind.)

In einem zweiten Schnitt wird dann die entscheidende Näherung bei der MTA-Methode eingeführt. Diese soll ja für Multiphoton-Prozesse sehr hoher Ordnung in einem langwelligen Feld gelten. In diesem Fall ist das Verhältnis (2.16) sehr groß. In Ref. 61 wird daher geschlossen, daß unter der Voraussetzung, daß die Photonenenergie sehr klein gegen die Niveauabstände ist, die Wechselwirkung H_E in Gl. (2.10) viel kleiner ist als der Wechselwirkungsterm H_R in Gl. (2.6) und daher noch störungstheoretisch behandelt werden kann, wenn in Gl. (2.6) schon keine Störungstheorie mehr erlaubt ist. Die Näherung der MTA-Methode besteht nun darin, in der Bewegungsgleichung (2.10) für χ die Wechselwirkung $-e\vec{E}r$ ganz zu vernachlässigen und χ damit durch die ungestörte Wellenfunktion ϕ_n^0 (2.14) der feldfreien Schrödinger-Gleichung (2.15) zu approximieren. Durch Rücktransformation erhält man als angenäherte Lösung der Schrödinger-Gleichung (2.6) in der R-Eichung die sog. MTA-Wellenfunktion, die identisch mit der Wellenfunktion Φ_n^R (2.26) ist:

$$\Psi_n^{MTA}(\vec{r}, t) = \Phi_n^R(\vec{r}, t). \quad (2.35)$$

Die MTA-Wellenfunktion soll jedoch ganz im Gegensatz zu den nichtwechselwirkenden Zuständen ϕ_n^R aufgrund des "integrierenden Faktors" $\exp(i e \vec{A} r / \hbar)$ die Wechselwirkung zwischen gebundenen Teilchen und äußerem Feld - näherungsweise - zu jeder beliebigen Ordnung enthalten.

Die MTA-Methode wurde gleich nach Veröffentlichung auf eine Serie von Problemen angewandt, bis sie aus mehreren Gründen kritisiert und als inkonsistent verworfen wurde /62, 63/. In Ref. 62 wurde am konkreten Beispiel des harmonischen Oszillators vorgeführt, daß die Methode zu falschen Ergebnissen führt. Außerdem wurde bewiesen, daß bei Verwendung der MTA-Methode in Störungstheorie Terme vernachlässigt werden, die von derselben Größenordnung sind wie die berücksichtigten.

Dennoch wird die MTA-Wellenfunktion gegenwärtig zur Beschreibung von Multiphotonprozessen bei der Wechselwirkung zwischen einem Atomkern und einem Radiofeld benutzt /19/. In Ref. 64 wird dies zu rechtfertigen versucht, ohne die vorgebrachte Kritik überzeugend widerlegen zu können. Natürlich ist es legitim, Gl. (2.34) nur als Ansatz für die Wellenfunktion und nicht als Eichtransformation zu betrachten. Bei der entscheidenden Näherung der MTA-Methode, der Vernachlässigung der Wechselwirkung $-e\vec{E}\vec{r}$ in Gl. (2.10), spielt es jedoch überhaupt keine Rolle, ob die Potentiale durch $(\vec{A}, 0)$ oder durch $(0, -\vec{E}\vec{r})$ gegeben sind. Beide Standpunkte sollten also auch zu demselben Verständnis der Methode führen. Vom Standpunkt der Eichtransformation beschreibt die MTA-Wellenfunktion den korrekten nichtwechselwirkenden Zustand in der R-Eichung, da für χ der nichtwechselwirkende Zustand ϕ_n^0 in der E-Eichung verwendet wird /65/. Wie in Abschnitt 2.2 gezeigt wurde, ist die MTA-Wellenfunktion (2.35) ein Eigenzustand des Energieoperators ϵ^R bzw. des totalen Hamiltonoperators $H_0 + H_R$ mit einem festen, zeitunabhängigen Energieeigenwert E_n . Sie kann daher keine Multiphotonprozesse enthalten. Der "integrierende Faktor" $\exp(i e \vec{A} \vec{r} / \hbar)$ ist im übrigen nur ein instantaner Faktor, so daß nach Abschalten des äußeren Feldes die MTA-Wellenfunktion wieder in den Eigenzustand ϕ_n^0 von H_0 übergeht. Das Teilchen befindet sich also nach Abschalten des Feldes wieder in demselben Zustand wie vor dem Einschalten, Multiphotonübergänge können daher in der MTA-Wellenfunktion nicht enthalten sein.

Ob in Gl. (2.10) der $\vec{r} \cdot \vec{E}$ -Wechselwirkungsterm vernachlässigt wird oder in Gl. (2.6) die $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -Wechselwirkung, führt zu Fehlern derselben Größenordnung, unabhängig von dem Verhältnis (2.16). Wir haben in Abschnitt 2.2 die Ableitung und Interpretation der nichtwechselwirkenden Zustände ϕ_n^R in der R-Eichung sowie die Fragwürdigkeit von Schlußfolgerungen, die auf Gl. (2.16) beruhen, so ausführlich diskutiert, da diese Fragen immer

noch Gegenstand von Kontroversen sind. In Ref. 66 wird zur Rechtfertigung der MTA-Methode weiterhin angeführt, daß in der R-Eichung die ungestörten Zustände per Konstruktion durch die Eigenzustände ϕ_n^0 des ungestörten Hamiltonoperators H_0^R gegeben seien. Damit sei unsere Schlußfolgerung, die Wellenfunktion ϕ_n^R und damit die MTA-Wellenfunktion als die korrekte ungestörte Wellenfunktion in der R-Eichung aufzufassen, ein innerer logischer Widerspruch, da diese Wellenfunktionen vom Vektorpotential abhängen und somit eine Wechselwirkung mit dem Feld enthalten würden.

Auch die STA-Methode geht von einer geeigneten Transformation der Schrödinger-Gleichung (2.6) in der R-Eichung aus /67/. Es hat sich jedoch inzwischen herausgestellt, daß die STA-Methode zwar für die Beschreibung der Potentialstreuung freier Teilchen nützlich sein kann, für die Behandlung der Multiphotonionisation gebundener Teilchen aber ungeeignet ist /68/. Dennoch wurde eine Störungstheorie für die STA-Methode zur Beschreibung gebundener Zustände unter dem Einfluß intensiver Strahlungsfelder entwickelt /69, 70/. Inzwischen wurden jedoch die Ergebnisse von Ref. 69 widerrufen /71/, während für Ref. 70 gezeigt wurde, daß in dem betrachteten Intensitätsbereich die verwendete Methode nicht mehr gültig ist /72/. Die STA-Methode kommt also für die Beschreibung von Multiphotonprozessen im Kern nicht in Frage.

Eine Möglichkeit, doch die Feldeffekte auf einen gebundenen Zustand zu berücksichtigen, besteht darin, die gebundene Wellenfunktion nach den Wellenfunktionen eines freien Teilchens im äußeren Feld zu entwickeln /72-75/. Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, daß sich für ein freies Teilchen die Feldeffekte exakt in Form der sog. Volkov-Wellenfunktionen berücksichtigen lassen. Der stationäre Zustand $\phi_i^0(\vec{r}, t)$, in dem sich das gebundene Teilchen zum Zeitpunkt des Einschaltens des äußeren Feldes befindet, kann daher als Überlagerung von Volkov-Wellen dargestellt werden. Es muß dann die zeitliche Entwicklung dieses Wellenpakets unter dem Einfluß des Bindungspotentials bestimmt werden. Nach Abschalten des Feldes wird das Wellenpaket auf die möglichen stationären Endzustände projiziert, um die Übergangswahrscheinlichkeit zu bestimmen. Dieses Verfahren ist geeignet zur Beschreibung von extrem intensiven äußeren Feldern, die viel stärker als das Bindungsfeld sind. Obwohl dann das Bindungspotential nur in erster Ordnung Störungstheorie berücksichtigt werden muß, ist der Rechenaufwand bereits erheblich /73, 74/.

Für den uns hier interessierenden Fall, daß keine der beiden Wechselwirkungen als Störung betrachtet werden kann, ist dieses Verfahren viel zu kompliziert. Nur für ein grob vereinfachtes Modell, ein eindimensionales δ -förmiges Bindungspotential, lassen sich numerisch Lösungen finden, in denen sowohl das Strahlungsfeld als auch das Bindungspotential exakt berücksichtigt sind /75/. An diesen numerischen Lösungen läßt sich die zeitliche Entwicklung von Multiphotonabsorptionen studieren. Zur Beschreibung der Ionisation in einem intensiven Feld wurde in Ref. 75 der sog. Keldysh-Parameter γ /76/ gewählt, der das Verhältnis zwischen Bindungsenergie I_0 und maximaler kinetischer Energie $v^2/2 mc^2$ (2.74) des freien ionisierten Elektrons im äußeren Feld $\vec{E}(t)$ angibt

$$\gamma^2 = \frac{2}{\omega^2} \frac{I_0}{mc^2} \quad . \quad (2.36)$$

Der Feldparameter v (1.1) wurde in der Einleitung erläutert. In Ref. 75 wurde die Mindest-Wechselwirkungszeit bestimmt, bis die Multiphoton-Ionisation ihre asymptotische, aus der Störungstheorie bekannte Form annimmt. Es wurde gefunden, daß diese Mindestzeit mit abnehmender Feldstärke (wachsendes γ) sehr schnell anwächst. So wurde für die 10-Photonen-Absorption bei $\gamma = 65$ eine minimale Wechselwirkungszeit $T = n 2\pi/\omega$ von $n = 10^5$ Perioden des Feldes berechnet, bei $\gamma = 650$ bereits von 10^{23} Perioden. In diesem Fall können mit gepulsten Feldern keine Multiphoton-Übergänge mehr induziert werden. Für einen Atomkern in einem langwelligen Feld, bei dem ja Multiphotonprozesse wesentlich höherer Ordnung benötigt werden, kann man aus Ref. 75 entnehmen, daß auch für beliebig lange Zeiten die Wechselwirkung zwischen Kern und Feld vernachlässigt werden kann, falls $\gamma^2 \gtrsim 1$ ist.

Aufgrund der Diskussion im letzten Abschnitt ist klar, daß neben dem Parameter γ (2.36) auch das Verhältnis zwischen Wechselwirkungsenergie H_E in der Schrödinger-Gleichung (2.10) und Bindungsenergie I_0 eine Rolle spielt. H_E läßt sich abschätzen zu $eE_0 R = (E_0/E_c)(R/\lambda_c)mc^2$. Dies führt zu dem weiteren Parameter

$$\tilde{\gamma}^2 = \frac{E_c}{E_0} \frac{\lambda_c}{R} \frac{I_0}{mc^2} \quad . \quad (2.37)$$

In den numerischen Ergebnissen von Ref. 75 gibt es eindeutige Hinweise auf diesen Parameter $\tilde{\gamma}$. Solange $\tilde{\gamma}^2 \gg 1$ und $\tilde{\gamma}^2 \gtrsim 1$ sind, sind Anregungen des Kerns praktisch ausgeschlossen.

Die zentrale Schwierigkeit bei der numerischen Behandlung der Schrödinger-Gleichung (2.10) bzw. (2.6) liegt darin, daß für die stationären Kernzustände ϕ_n^0 die typische Zeiteinheit $\hbar/E_n$ in der Größenordnung von 10^{-22} s liegt, während die Zeitskala ω^{-1} des von außen angelegten Feldes für Laser bei 10^{-15} s und für Radiofelder gar bei 10^{-6} s liegt. Bei so großen Wechselwirkungszeiten kann man bei exakter numerischer Integration keine stabilen numerischen Lösungen mehr erwarten. Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeiten zu überwinden, ist die sog. "multiple scale"-Störungstheorie /77/. Diese Methode liefert Lösungen, die gleichmäßig für beliebige Zeiten t gültig sind. Dazu wird neben der "schnellen" Zeitvariablen t eine zweite "langsame" Zeitvariable $t' = (\hbar\omega/V_0)t$ eingeführt, die als von t unabhängig behandelt wird. Für V_0 kann die Tiefe des Bindungspotentials eingesetzt werden. Für die Wellenfunktion wird eine Entwicklung nach dem Parameter $\hbar\omega/V_0$ angesetzt. In erster Ordnung erhält man dann eine Gleichung, in der die langsam veränderliche Störung als konstant behandelt wird. Es ist also die Schrödinger-Gleichung (2.10) mit einem statischen Feld $\vec{E}(t) \equiv \vec{E}_0$ zu lösen. Die langsame Zeit t' taucht in der Lösung nur als Parameter auf. Die Korrekturen aufgrund des Übergangs von einem statischen Feld $\vec{E}_0$ zu einer langsam veränderlichen ebenen Welle $\vec{E}_0 \sin \omega t$ mit $\hbar\omega \ll V_0$ ergeben sich aus der nächsthöheren Ordnung. Auch die Anwendung dieses Verfahrens führt zu dem Ergebnis, daß es selbst bei beliebig großen Wechselwirkungszeiten keine merklichen Einflüsse eines zeitabhängigen, langwelligen Strahlungsfeldes auf die nukleare Wellenfunktion gibt, solange der Parameter $\tilde{\gamma}^2$ (2.37) groß gegen Eins ist.

2.5 Ungebundene geladene Teilchen im äußeren Feld

In den folgenden drei Kapiteln werden wir die Bewegung eines freien Teilchens sowohl in der nichtrelativistischen Schrödinger-Theorie für ein Feld in Dipolnäherung als auch in der relativistischen Dirac-Theorie für ein Feld mit voller Ortsabhängigkeit benötigen.

Wir beginnen mit der Schrödinger-Gleichung (2.1) für ein freies Teilchen ($V = 0$) in der R-Eichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^R(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A}(t))^2 \psi^R(\vec{r}, t). \quad (2.38)$$

Für freie Teilchen ist die Verwendung der R-Eichung wesentlich vorteilhafter gegenüber der E-Eichung, da in dieser Eichung der kanonische Impuls $\vec{p}$ erhalten ist. Wie wir zeigen werden, kann diese Bewegungskonstante zur Lösung von Gl. (2.38) ausgenutzt werden. Der kanonische Impuls $\vec{p}$ ist in der R-Eichung eine Erhaltungsgröße, da er zeitunabhängig ist und mit dem freien Hamilton-Operator H^R in Gl. (2.38) vertauscht, solange wir in der Dipolnäherung arbeiten. Andererseits ist $\vec{p}$ eine nicht-physikalische Größe und hat somit in jeder Eichung andere Eigenwerte. Speziell in der E-Eichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^E(\vec{r}, t) = \left\{ \frac{\vec{p}^2}{2m} - e\vec{E}(t)\vec{r} \right\} \psi^E(\vec{r}, t) \quad (2.39)$$

stimmt der kanonische Impuls $\vec{p}$ mit dem mechanischen Impuls $\vec{\pi}$ überein und ist somit keine Erhaltungsgröße mehr.

Nur in der R-Eichung können wir den folgenden Ansatz für die Lösung ψ^R von Gl. (2.38) machen: Wir nehmen an, daß sich ψ^R faktorisieren läßt in eine ungestörte ebene Welle, die von einem konstanten Parameter $\vec{p}$ abhängt, und eine Funktion $f(t)$, die in der Dipolnäherung für das äußere Feld nur von der Zeit abhängt

$$\psi^R(\vec{r}, t) = f(t) e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{r})} \quad (2.40)$$

Die Größe E soll mit dem Parameter $\vec{p}$ über die nichtrelativistische Dispersionsbeziehung

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (2.41)$$

verknüpft sein. In der nichtrelativistischen Theorie ist die Bedeutung des Parameters $\vec{p}$ offensichtlich: die Wellenfunktion ψ^R ist ein Eigenzustand des kanonischen Impulses mit Eigenwert $\vec{p}$. Man beachte, daß damit die Größe E (2.41) nur bei Abwesenheit des äußeren Feldes die kinetische

Energie beschreibt. Wir wollen E als asymptotische Energie bezeichnen, da sie nur nach Abschalten des äußeren Feldes mit der Energie des Teilchens übereinstimmt. Da Messungen in der Regel außerhalb des Feldes stattfinden, ist dies gerade die Größe, die mit dem Experiment verglichen werden muß.

Durch Einsetzen des Ansatzes (2.40) in die Schrödinger-Gleichung (2.38), Ausnutzung von Gl. (2.41) und Lösung der Bewegungsgleichung für $f(t)$ erhält man

$$\Psi^R(\vec{r}, t; \vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[E_* - \vec{p} \cdot \vec{r} - \frac{1}{2m} \int_{t_0}^* d\tau (2e\vec{p} \cdot \vec{A}(\tau) - e^2 \vec{A}^2(\tau)) \right] \right\}. \quad (2.42)$$

Das Normierungsvolumen ist hier mit Ω bezeichnet. Gleichung (2.42) stellt eine exakte Lösung der Schrödinger-Gleichung (2.38) dar. Für ein freies Teilchen kann also die Wechselwirkung mit dem äußeren Feld zu jeder beliebigen Ordnung berücksichtigt werden. Wir werden im folgenden Gl. (2.42) als nichtrelativistische Volkov-Wellenfunktion bezeichnen. Historisch gesehen wurde eine Wellenfunktion der Form (2.42) für die Bewegung eines freien Teilchens in einem äußeren Feld erstmals von Gordon 1926 /78/ durch Lösung der Klein-Gordon-Gleichung gewonnen. Von Volkov stammt die entsprechende Lösung der Dirac-Gleichung /79/. Inzwischen gehört die Wellenfunktion (2.42) zu den Standardhilfsmitteln bei der Untersuchung von Multiphotonprozessen /80/. Der Exponent in Gl. (2.42) ist identisch mit der klassischen Wirkung. Das freie Teilchen im äußeren Feld ist also ein Beispiel, bei dem die WKB-Lösung mit der exakten Lösung übereinstimmt. Die untere Integrationsgrenze in Gl. (2.42) ist ohne Bedeutung, da sie nur eine konstante Phase zur Wellenfunktion liefert.

Ein Vergleich zwischen der voll wechselwirkenden Wellenfunktion (2.42) und der nichtwechselwirkenden Wellenfunktion (2.26) in der R-Eichung erscheint angebracht. Da die Operatoren des kanonischen und mechanischen Impulses in der Dipol-Näherung kommutieren, ist die nichtrelativistische Volkov-Wellenfunktion auch ein Eigenzustand des Energieoperators ϵ^R (Gl. (2.21) mit $V = 0$)

$$\epsilon^R \Psi^R(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A}(t))^2 \Psi^R(\vec{r}, t).$$

Im Gegensatz zu der ungestörten Wellenfunktion in Gl. (2.26) hat die Volkov-Wellenfunktion einen zeitabhängigen Energie-Erwartungswert und kann somit Multiphoton-Prozesse beliebiger Ordnung beschreiben. Weiterhin enthält die Volkov-Wellenfunktion aufgrund des Zeitintegrals in Gl. (2.42) im Gegensatz zur ungestörten Wellenfunktion (2.26) einen echten "integrierenden Faktor", da auch nach Abschalten des Potentials die Volkov-Welle nicht in eine ebene Welle übergeht, sondern eine durch das Feld bedingte Phasenverschiebung zurückbleibt.

Um die Lösung der Schrödinger-Gleichung (2.39) in der E-Eichung zu erhalten, können wir die Eichtransformation (2.4) und (2.12) auf die Wellenfunktion (2.42) anwenden:

$$\begin{aligned} \Psi^E(\vec{r}, t; \vec{p}) &= e^{-\frac{i}{\hbar} e \vec{A}(t) \vec{r}} \Psi^R(\vec{r}, t; \vec{p}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\vec{\pi}(t) \vec{r} - \frac{1}{2\omega} \int_{t_0}^t d\tau \vec{\pi}^2(\tau) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Die nichtrelativistische Volkov-Wellenfunktion hängt in der E-Eichung nur vom Eigenwert des Operators des mechanischen Impulses $\vec{\pi}$ ab. Dies ist eine echt-physikalische Größe und hat somit denselben Wert in jeder Eichung.

Bei einem nuklearen Betazerfall werden in der Regel relativistische Elektronen emittiert. Zur korrekten Beschreibung dieses Zerfallsprozesses im äußeren Feld benötigen wir daher die Volkov-Lösungen der Dirac-Gleichung:

$$\left\{ \not{p} - e \not{A}^g(\underline{x}) - mc \right\} \Psi^g(\underline{x}) = 0. \quad (2.44)$$

Für die Notationen in der relativistischen Quantenmechanik verwenden wir die Konventionen aus Ref. 81, d.h. $\not{a} = a_\mu \gamma^\mu$. Die Metrik wird so gewählt, daß das Skalarprodukt die Form $a^\mu b_\mu = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \equiv \underline{a} \cdot \underline{b}$ hat. Gleichung (2.44) kann für ein Elektron in einer ebenen elektromagnetischen Welle mit Vierer-Ausbreitungsvektor n^μ ($n^\mu n_\mu = 0, \vec{n}^2 = 1$) exakt gelöst werden. Das Feld einer ebenen Welle hängt von Raum und Zeit nur über die Kombination $n^\mu x_\mu$ ab. Gleichung (2.44) kann gelöst werden für die Klasse von Eichungen mit

$$\partial^\mu A_\mu^g = \eta^\mu A_\mu^g = 0. \quad (2.45)$$

Der erste Teil dieser Gleichung stellt die Lorentz-Bedingung dar, der zweite die Transversalitätsbedingung. Diese zweite Bedingung kann für ebene Wellen in jeder Lorentz-Eichung erfüllt werden durch Hinzufügen einer additiven Konstanten zum Vektorpotential.

Zur Lösung von Gl. (2.44) setzen wir die Wellenfunktion in Analogie zu Gl. (2.40) an als

$$\Psi^g(\underline{x}) = f^g(\underline{p}, \underline{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} p \underline{x}}, \quad (2.46)$$

wobei der Parameter p^μ die Nebenbedingung

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \quad (2.47)$$

erfüllen soll. Die Bedeutung von p^μ wird später erläutert. Wir werden sehen, daß in der relativistischen Theorie aufgrund der Ortsabhängigkeit des äußeren Feldes der Parameter p nicht mit dem kanonischen Impuls übereinstimmt. Der kanonische Impuls soll in Zukunft mit p_c bezeichnet werden.

Die Bewegungsgleichung für f^g erhält man durch Einsetzen des Ansatzes (2.46) in die Dirac-Gleichung zweiter Ordnung, die aus Gl. (2.44) durch nochmaliges Anwenden des hermitisch konjugierten des Operators in der geschweiften Klammer hervorgeht. Die Volkov-Lösung hat dann die Gestalt /82/

$$\Psi^g(\underline{x}; p, s) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} D_p^g(\underline{p}, \underline{x}) \frac{u(p, s)}{\sqrt{2E}} e^{\frac{i}{\hbar} S_p^g(\underline{x})}. \quad (2.48)$$

Hierbei wurden zur Abkürzung der Spinfaktor

$$D_p^g(\underline{p}, \underline{x}) = 1 + \frac{e}{2p_\mu} \not{A}^g(\underline{p}, \underline{x}) \quad (2.49)$$

und die klassische Wirkung eines Teilchens im Feld einer ebenen Welle

$$S_p^g(\underline{x}) = -p \underline{x} - \frac{1}{2p_\mu} \int_{\phi_0}^{\underline{p} \cdot \underline{x}} d\phi (2e \underline{A}^g(\phi) p - e^2 \underline{A}_g^2(\phi)) \quad (2.50)$$

eingeführt. Der Spinor u ist eine Lösung positiver Energie der freien Dirac - Gleichung

$$(\not{p} - mc) u(p, s) = 0 \quad (2.51)$$

mit der Normierung

$$u^\dagger u = 2E \quad (2.52)$$

Die Größe s bezeichnet die Spinprojektion und $E \equiv cp_0$ die asymptotische Energie, die über die Massenschalen-Bedingung (2.47) mit dem Parameter $\vec{p}$ verknüpft ist.

Mit sog. "einfachen" Eichtransformationen, bei denen die skalare Funktion $\chi(\underline{x})$ nur über das Skalarprodukt $n^\mu x_\mu$ von x^μ abhängt, d.h.

$$\begin{aligned} A_\mu^{g'}(\underline{x}) &= A_\mu^g(\underline{x}) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \chi(\underline{x}) \\ &= A_\mu^g(\underline{x}) + n_\mu \chi'(\underline{x}) \end{aligned}$$

bleibt man immer in der Klasse von Eichungen (2.45), für die die Wellenfunktionen (2.48) Lösungen der Dirac-Gleichung sind. Damit erhält man die Volkov-Wellenfunktion in der Eichung g' sowohl durch die unitäre Transformation (2.4) als auch durch die Substitution der Potentiale.

Im folgenden soll nur noch eine spezielle Lorentz-Eichung, die R-Eichung ($A_\mu^R \equiv A_\mu$)

$$A_0 = 0, \quad \vec{\nabla} \vec{A} = 0, \quad n^\mu A_\mu = 0 \quad (2.53)$$

benutzt werden. Außerdem wird als Ausbreitungsrichtung der Welle die z -Achse gewählt, so daß $n^\mu = (1, 0, 0, 1)$ und $A^\mu = (0, A^1, A^2, 0)$ ist. Wir wollen zunächst die Bedeutung des Parameters p^μ im Feld veranschaulichen. Bei dieser Wahl der Ausbreitungsrichtung ist die Wellenfunktion aufgrund des Ansatzes (2.46) ein Eigenzustand der Operatoren

$$\hat{p}^1 = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \hat{p}^2 = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \hat{p}^0 - \hat{p}^3 = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \quad (2.54)$$

mit den Eigenwerten p^1 , p^2 und $p^0 - p^3$. Diese Komponenten des konstanten Vierervektors p^μ stimmen also mit den entsprechenden Komponenten des kanonischen Impulses p_C^μ überein

$$p^1 = p_C^1, \quad p^2 = p_C^2, \quad p^0 - p^3 = p_C^0 - p_C^3. \quad (2.55)$$

Damit gilt insbesondere $p^\mu k_\mu = p_C^\mu k_\mu$ und $p^\mu A_\mu = p_C^\mu A_\mu$. Es ist leicht nachzuprüfen, daß die Operatoren (2.54) mit dem Hamilton-Operator der Dirac-Gleichung (2.44) vertauschen, so daß die Komponenten p_C^1 , p_C^2 und $p_C^0 - p_C^3$ des kanonischen Impulses $p_C^\mu = \pi^\mu + eA^\mu$ tatsächlich im Feld Bewegungskonstanten sind, nicht jedoch die Einzelkomponenten $p_C^0 = \pi^0$ und $p_C^3 = \pi^3$. Der konstante Vektor p^μ ist der asymptotische, experimentell zugängliche Impuls, da er außerhalb des Feldes in den kinetischen und kanonischen Impuls übergeht.

In Kapitel III werden wir nur monochromatische ebene Wellen mit Frequenz ω betrachten. Dann hängt das Feld nur noch von dem Wellenzahl-Vierervektor

$$k^\mu = k_\mu{}^\mu = \frac{\omega}{c} \, u^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, 0, 0, \frac{\omega}{c} \right) \quad (2.56)$$

ab. Wir werden die Volkov-Wellenfunktion daher in der Form

$$\psi^R(\underline{x}; \underline{p}, s) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} D_p(\underline{k}\underline{x}) \frac{u(p, s)}{\sqrt{2E}} e^{\frac{i}{\hbar} S_p(\underline{x})} \quad (2.57a)$$

$$D_p(\underline{k}\underline{x}) = 1 + \frac{e}{2pk} \not{K} \not{A}(\underline{k}\underline{x}) \quad (2.57b)$$

$$S_p(\underline{x}) = -p\underline{x} + \frac{1}{2pk} \int_{\phi_0}^{\underline{k}\underline{x}} d\phi (2e\vec{A}(\phi) \vec{p} - e^2 \vec{A}^2(\phi)) \quad (2.57c)$$

benutzen.

Für die expliziten Rechnungen in Kap. III und IV werden wir immer eine monochromatische, zirkular polarisierte ebene Welle mit Drehsinn $\sigma = \pm 1$ und Frequenz ω betrachten, die sich in z-Richtung ausbreitet:

$$\vec{E}(\underline{k}\underline{x}) = E_0 (\hat{e}_1 \sin \underline{k}\underline{x} + \sigma \hat{e}_2 \cos \underline{k}\underline{x}). \quad (2.58)$$

Diese Felder sind mathematisch einfacher zu handhaben als linear polarisierte Wellen. Da wir nicht speziell an Polarisierungseffekten interessiert sind, sollten beide Formen der Polarisation zu qualitativ ähnlichen physikalischen Ergebnissen führen. Das zugehörige Vektorpotential in der R-Eichung hat die Gestalt

$$\vec{A}(\underline{k}, \underline{x}) = a(\hat{e}_1 \cos \underline{k} \cdot \underline{x} - \zeta \hat{e}_2 \sin \underline{k} \cdot \underline{x}) , \quad a = \frac{E_0}{\omega} . \quad (2.59)$$

Für zirkular polarisierte Felder ist $\vec{A}^2 = a^2$ konstant. Damit kann man die klassische Wirkung S_p (2.57c) in die Form bringen

$$S_p(\underline{x}) = -\vec{p} \cdot \underline{x} + \hbar \zeta \sin(\underline{k} \cdot \underline{x} + \zeta \varphi) . \quad (2.60)$$

Die untere Integrationsgrenze in Gl. (2.57c) wurde vernachlässigt, da sie nur zu einer konstanten Phase in der Wellenfunktion führt. Zur Erläuterung der einzelnen Terme in S_p ist es nützlich, die folgenden Größen einzuführen: für die Darstellung des Impulsvektors $\vec{p}$ benötigen wir sowohl seine Polarkoordinaten (p, φ, ϑ) mit

$$\cos \varphi = \frac{p_1}{p_T} , \quad \sin \varphi = \frac{p_2}{p_T} , \quad \sin \vartheta = \frac{p_T}{p} \quad (2.61)$$

als auch die Transversal- und Differenzkoordinaten

$$p_T = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} , \quad p_d = p_0 - p_3 . \quad (2.62)$$

Mit Hilfe der Massenschalen-Bedingung (2.47) kann p_d durch die Komponenten des Impulses $\vec{p}$ ausgedrückt werden. Weiterhin wollen wir die dimensionslosen Größen

$$\varepsilon = \frac{E}{mc^2} , \quad \Delta \varepsilon = \frac{p_d}{mc} \quad (2.63)$$

einführen, wobei $\Delta \varepsilon$ unter Verwendung der Massenschalen-Bedingung auch geschrieben werden kann als

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \cos \vartheta , \quad (2.64)$$

sowie den aus Gl. (1.1) bekannten dimensionslosen Feldparameter

$$\gamma = \frac{ea}{mc} = \frac{eE_0}{m\omega c} = \frac{mc^2}{\hbar\omega} \frac{E_0}{E_c} = \frac{\lambda}{\lambda_c} \frac{E_0}{E_c} . \quad (2.65)$$

Unter Verwendung von Gl. (2.56) sowie (2.61)-(2.65) kann die dimensionslose Amplitude des oszillierenden Terms in der Wirkungskfunktion S_p (2.60) geschrieben werden als ($p_k = \omega p_d/c$)

$$z = \frac{ea p_T}{\hbar p_k} = \gamma \frac{mc^2}{\hbar\omega} \frac{p_T}{p_d} = \frac{\gamma c p \sin\vartheta}{\hbar\omega \Delta\varepsilon} . \quad (2.66)$$

Dieser oszillierende Anteil rührt aus der $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -Wechselwirkung in Gl. (2.57c). Für $v \sim 1$, $p_T/p_d \sim 1$ ist die Größenordnung der Amplitude durch $mc^2/\hbar\omega$ gegeben. Der konstante $\vec{A}^2$ -Term der Wechselwirkung führt in Gl. (2.60) zu einem effektiven Impuls $\tilde{p}^\mu$ im Feld

$$\tilde{p}^\mu = p^\mu + \frac{e^2 a^2}{2 p_k} k^\mu = p^\mu + \frac{\gamma^2}{2 \Delta\varepsilon} mc u^\mu . \quad (2.67)$$

Dieser Impuls ist identisch mit dem zeitlichen Mittel des Erwartungswertes des kanonischen und des kinetischen Impulses im Feld für einen Volkov-Zustand $|\Psi\rangle$:

$$\tilde{p}^\mu = \langle \langle \Psi | \pi^\mu | \Psi \rangle \rangle_{\text{zeit}} = \langle \langle \Psi | i \hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} | \Psi \rangle \rangle_{\text{zeit}} .$$

Die zeitliche Mittelung bedeutet hier die Vernachlässigung aller oszillierenden Terme. Das Quadrat von $\tilde{p}^\mu$ ergibt

$$\tilde{p}^\mu \tilde{p}_\mu = m^2 c^2 (1 + \gamma^2) . \quad (2.68)$$

Die Größe $m_{\text{eff}} = m \sqrt{1 + \gamma^2}$ wird häufig als effektive Masse des Elektrons im Feld bezeichnet. Der $\vec{A}^2$ -Term der Wechselwirkung führt also bei zirkularer Polarisation nur zu einer feldabhängigen Massenverschiebung, für die Multiphoton-Prozesse ist der $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -Term verantwortlich. Die effektive Masse wird für die Ergebnisse von Kap. III eine entscheidende Rolle spielen, so daß der $\vec{A}^2$ -Term auf keinen Fall vernachlässigt werden darf.

Wie aus Gl. (2.57) ersichtlich ist, hängt der Erwartungswert des kinetischen Impulses π^μ und damit des kanonischen Impulses $p^\mu = \pi^\mu + eA^\mu$ in einem Volkov-Zustand vom Spin ab. Dieser kinetische Impuls liegt nicht auf der Massenschale. Wir können jedoch einen über den Spin gemittelten kinetischen Impuls $\tilde{\pi}^\mu$ im Feld definieren

$$\tilde{\pi}^\mu = \langle\langle \Psi | \pi^\mu | \Psi \rangle\rangle_{\text{spins}} = \langle\langle \Psi | i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - e A^\mu | \Psi \rangle\rangle_{\text{spins}}$$

der die Form

$$\tilde{\pi}^\mu = p^\mu - e A^\mu - \frac{1}{2pk} (2e \vec{A} \vec{p} - e^2 \vec{A}^2) k^\mu \quad (2.69)$$

hat und offensichtlich auf der Massenschale liegt

$$\tilde{\pi}^\mu \tilde{\pi}_\mu = m^2 c^2. \quad (2.70)$$

Durch zeitliche Mittelung von $\tilde{\pi}^\mu$ erhält man wieder $\tilde{p}^\mu$ (2.67). Dieser weitere neue Impuls wird in Kap. V eine Rolle spielen. Für Klein-Gordon-Teilchen ist er identisch mit dem kinetischen Impuls im Feld.

Aus Gl. (2.66) und (2.67) ist zu entnehmen, daß die klassische Wirkung S_p und entsprechend auch die gesamte Volkov-Wellenfunktion über die Parameter $v = (mc^2/\hbar\omega)(E_0/E_c)$ und $v(mc^2/\hbar\omega) = (mc^2/\hbar\omega)^2(E_0/E_c)$ vom äußeren Feld abhängt. Dies ist zu vergleichen mit gebundenen Zuständen, bei denen das äußere Feld in den Parameter (2.37) nur über die dimensionslose Größe E_0/E_c eingeht.

Wir wollen die Volkov-Wellenfunktion (2.57) und (2.60) in einem zirkular polarisierten Feld noch in einer alternativen Form schreiben, aus der die Beiträge der verschiedenen Multiphoton-Ordnungen sofort ersichtlich sind. Die Multiphoton-Prozesse beruhen nur auf dem oszillierenden Anteil der klassischen Wirkung (2.60). Um dies zu erläutern, benutzen wir die erzeugenden Funktionen der Besselfunktionen $J_n(z)$ /83/

$$e^{iz \sin \alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\alpha}, \quad e^{iz \cos \alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\alpha}. \quad (2.71)$$

Durch Einsetzen von Gl. (2.60) in die Wellenfunktion (2.57) und Entwicklung gemäß (2.71) kann die Volkov-Lösung in einem zirkular polarisierten Feld geschrieben werden als

$$\Psi^R(x; p, s) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \frac{u(p, s)}{\sqrt{2E}} e^{in\phi} e^{-\frac{i}{\hbar}(\tilde{p} - n\hbar k)x}. \quad (2.72)$$

Die Spinfaktoren D_n sind jetzt unabhängig von x^μ :

$$D_n = \int_n(z) + \frac{ea}{4pk} \left\{ \not{\epsilon}_1 \left(e^{-i\delta\varphi} \int_{n-1}(z) + e^{i\delta\varphi} \int_{n+1}(z) \right) + i\delta \not{\epsilon}_2 \left(e^{-i\delta\varphi} \int_{n-1}(z) - e^{i\delta\varphi} \int_{n+1}(z) \right) \right\} \quad (2.73)$$

Für linear polarisierte Felder wäre eine etwas aufwendigere Entwicklung nach verallgemeinerten Besselfunktionen notwendig. Bei praktischen Rechnungen ist die Form (2.72) der Form (2.57) und (2.60) vorzuziehen, da die Orts-Zeit-Abhängigkeit separiert wurde, so daß die Berechnung von Übergangsmatrixelementen recht einfach ist.

Obwohl nur klassische Felder betrachtet werden, ist es üblich, die einzelnen Terme in der unendlichen Summe (2.72) mit Multiphotonprozessen für n absorbierte ($n < 0$) oder emittierte ($n > 0$) Photonen zu identifizieren [30]. Dies beruht darauf, daß der x^μ -abhängige Exponentialfaktor in Gl. (2.72) eine effektive Energie und einen effektiven Impuls liefert, die sich in diskreten Schritten der Einheit $\hbar\omega$ bzw. $\hbar\vec{k}$ ändern. Dies entspricht der Energie und dem Impuls eines einzelnen Photons. Wie wir in Kapitel III sehen werden, folgen aus dieser Form der Wellenfunktion für die Übergangsraten Erhaltungsregeln, in die das äußere Feld nur in Form dieser Quasiquanten eingeht. Mit dieser Photonen-Interpretation der Volkov-Wellenfunktion (2.72) können wir leicht den wahrscheinlichsten Energieaustausch zwischen Feld und Teilchen abschätzen. Wie im Anhang gezeigt, erreichen Besselfunktionen mit großem Argument z ihr Maximum als Funktion der Ordnung n für $n \approx z$. Am wahrscheinlichsten werden also z Photonen absorbiert, entsprechend einer gesamten Energie von $v(p_T/p_d)mc^2$. Falls der Feldparameter in der Größenordnung $v \sim 1$ liegt und das emittierte Teilchen relativistisch ist, so daß $p_T/p_d \sim 1$, kann ein Elektron bei einem Betazerfall Energie in der Größenordnung $mc^2 \sim 1$ MeV absorbieren. Bei einem nichtrelativistischen Elektron ($p_T \ll p_d$) liegt der wahrscheinlichste Energietransfer in der Größenordnung der kinetischen Energie cp_T . Für größere Parameter v wird dieser Energietransfer noch entsprechend größer. Da bei einem nuklearen Betazerfall die Q -Werte typischerweise im Bereich um 1 MeV liegen, sollte man beispielsweise mit einem Laserfeld der Stärke $v \sim 1$ den Zerfallsprozeß deutlich beeinflussen können. Es ist wichtig festzuhalten, daß das äußere Feld in

diese Abschätzung über den Parameter v eingeht, nicht über die Feldstärke allein wie in Gl. (2.37) bei gebundenen Teilchen.

Die nichtrelativistische Volkov-Wellenfunktion läßt sich in einem zirkular polarisierten Feld ebenfalls in der Form (2.57) und (2.60) oder (2.72) darstellen. Dazu müssen alle Spinterme herausgenommen und aufgrund der Näherung großer Wellenlängen alle ortsabhängigen Terme vernachlässigt werden, die von dem Feld abhängen. Weiterhin ist im nichtrelativistischen Grenzfall $\Delta\varepsilon = 1$.

Häufig wird argumentiert /72/, daß die nichtrelativistische Volkov-Wellenfunktion nur anwendbar ist bei Feldern mit Intensität $v \ll 1$. Dieses Argument beruht darauf, daß die nichtrelativistische Lorentz-Gleichung für ein klassisches Elektron im Feld einer ebenen Welle

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}(t) = \hat{e}_\lambda e E_0 \cos\omega t$$

die Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{eE_0}{m\omega} \hat{e}_\lambda \sin\omega t = v c \hat{e}_\lambda \sin\omega t$$

liefert. In der Geschwindigkeit $|\vec{v}| = v c$ taucht wieder der klassische Feldparameter v (1.1) auf. Daraus erhält man die Amplitude der kinetischen Energie eines freien Elektrons, das in dieser Welle oszilliert, zu

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{v^2}{2} m c^2. \quad (2.74)$$

Dies ist gerade der effektive Massenterm, um den die $\vec{A}^2$ -Wechselwirkung im nichtrelativistischen Grenzfall $\Delta\varepsilon = 1$ die Energie $E = cp_0$ in die effektive Energie im Feld $\tilde{cp}_0 = E + (v^2/2)mc^2$ verschiebt. Wegen $v = v/c$ ist die nichtrelativistische Theorie mit der Dipolnäherung nur für $v < 1$ sinnvoll. Für höhere Intensitäten wird das Teilchen im Feld so stark beschleunigt, daß es relativistisch behandelt werden muß. Man beachte jedoch, daß das äußere Feld nur die transversalen Komponenten der Geschwindigkeit beeinflusst. Die longitudinale Geschwindigkeit eines nichtrelativistischen Teilchens bleibt auch in einem intensiven Feld nichtrelativistisch. In Kap. IV werden wir sehen, daß man auch für $v > 1$ mit der nichtrelativistischen Volkov-Wellenfunktion zu qualitativ korrekten Ergebnissen kommen kann.

Die Volkov-Wellenfunktion beschreibt nur Teilchen in einer unendlich ausgedehnten ebenen Welle. Zur Anwendbarkeit der Volkov-Wellenfunktion auf geladene Teilchen in einem fokussierten Laserpuls muß sichergestellt sein, daß der Puls lang genug und sein Durchmesser groß genug ist, um ihn als ebene Welle annähern zu können.

2.6 Keldysh-Näherung

Aufgrund der Ergebnisse der letzten Abschnitte, daß nämlich der Kern durch ein äußeres Feld praktisch unbeeinflusst bleibt und daß für ein freies Elektron die Wechselwirkung mit einem äußeren Feld exakt berücksichtigt werden kann, bietet sich folgendes Modell zur Beschreibung des nuklearen Betazerfalls im äußeren Feld an. Im Anfangszustand wird die Wechselwirkung zwischen Feld und Kern vernachlässigt. Im Endzustand wird die Wechselwirkung zwischen Feld und emittiertem Elektron exakt berücksichtigt, die Coulomb-Wechselwirkung zwischen Elektron und Feld sowie die Wechselwirkung zwischen Feld und Kern wird vernachlässigt. Die Vernachlässigung der Coulombkorrekturen ist gerechtfertigt für leichte Kerne und moderate Zerfallsenergien (vgl. Abb. 1). Damit wird der Kern durch einen ungestörten gebundenen Zustand und das Elektron durch einen Volkov-Zustand repräsentiert. Für das ungeladene Antineutrino verwenden wir eine Lösung negativer Energie der freien Dirac-Gleichung

$$\psi_{-}(x; \vec{q}, s_{-}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{-}}} \frac{u(q, s_{-})}{\sqrt{2E_{-}}} e^{-\frac{i}{\hbar} q x} \quad (2.75)$$

mit der Dispersionsbeziehung $E_{-} = c|\vec{q}|$. Die Spinoren sind auf

$$u^{+} u = 2E_{-} \quad (2.76)$$

normiert.

Dieses Modell wird in den folgenden Kapiteln III und IV verwendet. Es entspricht einer abgewandelten Version der Keldysh-Näherung /76/, die zur Beschreibung der Multiphoton-Ionisation gebundener Elektronen in der Atomhülle eingeführt wurde. In Ref. 76 wurden die nichtwechselwirkenden Wellenfunktionen und die nichtrelativistischen Volkov-Wellenfunktionen in der E-Eichung verwendet. Man kann jedoch jede beliebige Eichung ver-

wenden. In Kap. IV werden wir bei der nichtrelativistischen Behandlung des Elektrons sowohl die E- als auch die R-Eichung diskutieren. In Kap. III werden wir die R-Eichung verwenden, da das Elektron voll relativistisch behandelt werden soll und es in diesem Fall kein Äquivalent zur E-Eichung gibt. Wichtig ist nur, daß alle geladenen Teilchen konsistent in derselben Eichung beschrieben werden. Es ist nicht korrekt, in Übergangsmatrixelementen für geladene Teilchen Wellenfunktionen in verschiedenen Eichungen zu verwenden, wie dies z.B. in Ref. 61 bei Verwendung der MTA-Methode in Störungstheorie geschieht, wo ungestörte Wellenfunktionen in der E- und in der R-Eichung gemischt werden, oder wie in Ref. 84 bei der Beschreibung der Multiphoton-Ionisation, wo ungestörte Wellenfunktionen in der E-Eichung mit nichtrelativistischen Volkov-Wellenfunktionen in der R-Eichung kombiniert werden.

Kapitel III

Klassische Effekte in einem langwelligen Feld;

Erlaubter Betazerfall

In diesem Kapitel soll der erlaubte Betazerfall unter dem Einfluß eines intensiven, zirkular polarisierten, langwelligen (d.h. mit optischen und größeren Wellenlängen) elektromagnetischen Feldes untersucht werden.

Ziel ist es, die Eigenschaften der beim Zerfall emittierten Teilchen - insbesondere die Energie- und Winkelverteilung der Elektronen bzw. Positronen - und die Lebensdauer des Kerns zu bestimmen.

Ausgangspunkt sind die Arbeiten von Baranov /23/ und Becker et al. /18/. In beiden Veröffentlichungen wurden für heutzutage verfügbare Laserfelder aufgrund des Phasenraumeffekts spektakuläre Änderungen im Spektrum der Elektronen und vor allem beträchtliche Verkürzungen der Lebensdauer sowohl des freien Neutrons als auch einiger betazerfallender Kerne vorhergesagt. So soll sich das Spektrum zu wesentlich höheren Energien erstrecken und für bestimmte Parameterkombinationen zwei Maxima aufweisen. Die Lebensdauer von Kernen mit kleinem Q -Wert wie z.B. Tritium soll um mehrere Größenordnungen verkürzt werden können.

Ausgehend von dem in Abschnitt 2.6 entwickelten Modell wird zuerst die Übergangswahrscheinlichkeit für Betazerfall im äußeren Feld berechnet. Wir nehmen an, daß das äußere Feld nur für das emittierte Elektron bzw. Positron im Endzustand wichtig ist, während die Kernzustände unbeeinflusst bleiben. Der Unterschied zum feldfreien Betazerfall besteht dann darin, daß das Elektron durch einen Volkov-Zustand beschrieben wird. In Abschnitt 3.1 wenden wir die Standardmethoden der relativistischen Quantenmechanik an, wie dies auch in Ref. 18 und 23 geschehen ist. In den folgenden Abschnitten werden wir einen neuen Weg zur Berechnung der gesuchten Meßgrößen einschlagen. Wir werden zu Ergebnissen gelangen, die völlig verschieden sind von denen in Ref. 18 und 23 und sich physikalisch wesentlich anschaulicher verstehen lassen. Ein Großteil der Ergebnisse ist nicht spezifisch für den Betazerfall, sondern kann auf beliebige Zerfalls- und gar Streuprozesse in langwelligen Feldern verallgemeinert werden.

In diesem Kapitel benutzen wir die Dirac-Theorie mit V-A Wechselwirkung zur Beschreibung des Betazerfalls. Die wesentlichen Änderungen im Zerfallsprozeß aufgrund des Einschaltens eines äußeren Feldes können jedoch

bereits im Rahmen der nichtrelativistischen Schrödinger-Theorie für das Elektron mit einem phänomenologischen Ansatz für die schwache Wechselwirkung abgeleitet werden. Die mathematisch einfacheren, nichtrelativistischen Ergebnisse dieses Kapitels sind in Ref. 85 dargestellt.

3.1 Übergangswahrscheinlichkeit

Die Berechnung der Übergangsrate des nuklearen Betazerfalls in einem äußeren Feld kann in Analogie zur Berechnung der feldfreien Rate durchgeführt werden. Wir folgen dazu der Theorie des nuklearen Betazerfalls in Ref. 86. Entgegen der üblichen Gewohnheit, in der relativistischen Quantenmechanik natürliche Einheiten mit $\hbar=c=1$ zu verwenden, werden wir $\hbar$ und c in allen Rechnungen mitnehmen, da später der klassische Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ eine wichtige Rolle spielen wird.

Ausgangspunkt aller Rechnungen ist der Hamilton-Operator für nuklearen Betazerfall:

$$H_B = \frac{g}{\sqrt{2}} \left\{ \hat{\bar{\Psi}}_N \gamma_\mu (C_V - C_A \gamma_5) \tau^{(+)} \hat{\Psi}_N \right\} \left\{ \hat{\bar{\Psi}}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \hat{\Psi}_e \right\} + h.c. \quad (3.1)$$

Der Operator $\hat{\Psi}_\nu$ vernichtet ein Neutrino oder erzeugt ein Antineutrino, $\hat{\bar{\Psi}}_e = \hat{\Psi}_e^\dagger \gamma_0$ erzeugt ein Elektron oder vernichtet ein Positron. Der Operator $\hat{\Psi}_N$ bezieht sich entsprechend auf den Kernzustand. Die Operatoren $\hat{\Psi}_e$, $\hat{\Psi}_\nu$ und $\hat{\Psi}_N$ können mit Hilfe der Operatoren $\hat{a}_{\vec{p},s}$ und $\hat{b}_{-\vec{p},-s}^\dagger$, die ein Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Spinzustand s vernichten bzw. ein Antiteilchen mit Impuls $(-\vec{p})$ und Spin $(-s)$ erzeugen, dargestellt werden als

$$\hat{\Psi} = \sum_{\vec{p},s} \left(\Psi^{(+)}(\vec{p},s) \hat{a}_{\vec{p},s} + \Psi^{(-)}(\vec{p},s) \hat{b}_{-\vec{p},-s}^\dagger \right) .$$

Die Wellenfunktionen $\Psi^{(+)}$ und $\Psi^{(-)}$ sind Lösungen positiver bzw. negativer Energie der Dirac-Gleichung mit Impuls $\vec{p}$ und Spinprojektion s . Der Isospinoperator $\tau^{(\pm)} = \sum_i \tau_i^{(\pm)}$ wirkt auf alle Neutronen bzw. Protonen im Kern und ist verantwortlich für den Übergang von einem Kern (Z,N) zu $(Z+1, N-1)$. Die Kopplungskonstante für Betazerfall hat den Wert $gC_V \approx 1.41 \times 10^{-49} \text{ erg cm}^3$ und das Verhältnis zwischen Axialvektor- und Vektoranteil des hadronischen Stromes beträgt

$$\alpha \equiv C_A/C_V \approx 1.25.$$

Die schwache Wechselwirkung soll als die den Übergang auslösende Störung betrachtet werden, während der Einfluß des äußeren elektromagnetischen Feldes exakt berücksichtigt werden soll. Die schwache Wechselwirkung wird daher wie üblich in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie behandelt. Wir beschränken die Diskussion zunächst auf β^- -Zerfall. Die Anwendung auf β^+ -Zerfall ist analog. Das S-Matrixelement für β^- -Zerfall hat die Form

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle E_f(I_f, M_f); 1_e(\vec{p}, s_e); 1_{\bar{\nu}}(\vec{q}, s_{\bar{\nu}}) | H_{\beta} | E_i(I_i, M_i); 0_e; 0_{\bar{\nu}} \rangle. \quad (3.2)$$

Die gebundenen Zustände des Kerns $|E(I, M)\rangle$ sind durch Anregungsenergie E und Spin (I, M) charakterisiert, während die Zustände der freien Teilchen $|N_a(\vec{p}, s)\rangle$ angeben, daß N Teilchen der Sorte a mit Impuls $\vec{p}$ und Spin s vorhanden sind.

Der Unterschied zwischen freiem Betazerfall und Zerfall in einem äußeren Feld liegt in der Wahl der Elektronen-Wellenfunktion. Während beim feldfreien Zerfall für ψ_e eine ebene Welle oder eine Coulombwelle angesetzt wird, erzeugt $\hat{\psi}_e$ nun den Volkov-Zustand (2.57) mit (2.60), der die Wechselwirkung eines freien Teilchens mit dem äußeren Feld exakt in jeder Ordnung enthält. Wenn man ferner den Antineutrino-Zustand durch die ebene Welle (2.75) beschreibt, erhält man für die S-Matrix

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \frac{g}{\sqrt{8EE_{\nu}\Omega_{\nu}\Omega_e}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r e^{\frac{i}{\hbar}[(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x} - \hbar\omega \sin(\vec{k}\cdot\vec{x} + \phi)]} \left\{ \bar{\psi}_{\nu}(\vec{r}, t) \gamma_{\mu} (C_V - C_A \gamma_5) \tau^{(+)} \psi_e(\vec{r}, t) \right\} \left\{ \bar{u}(\vec{p}, s) \bar{D}(\vec{k}_x) \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) u(\vec{q}, s_{\bar{\nu}}) \right\}. \quad (3.3)$$

Variablen, die sich auf das Elektron beziehen, sind nicht indiziert, während die Neutrino-Größen - soweit notwendig - mit einem Index versehen sind. Da die Volkovwellenfunktion in der R-Eichung verwendet wird, müssen in Gl. (3.3) auch die Kernwellenfunktionen ψ_N in dieser Eichung gewählt werden.

Wir wollen uns in diesem Kapitel nur mit dem erlaubten Betazerfall beschäftigen. Unter dieser Voraussetzung ist es möglich, zwei wesentliche Näherungen in Gl. (3.3) einzuführen. (i) Bei den typischen Energien des nuklearen Betazerfalls (Größenordnung $\sim \text{MeV}$) ist der Rückstoßimpuls $\vec{p}_N$ des zerfallenden Nukleons sehr klein gegen die Ruhemasse M_N , $|\vec{p}_N| \ll M_N c$. Die Vernachlässigung des Nukleon-Rückstoßes erlaubt die Vernachlässigung der kleinen Komponenten in den Spinoren ϕ_N . In diesem nichtrelativistischen Grenzfall reduziert sich der nukleare Strom in Gl. (3.3) zu

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_N \gamma_\mu \tau^{(+)} \Psi_N &\longrightarrow \delta_{\mu 0} \overline{\Psi}_N^+ M_F^{(+)} \Psi_N, \\ \overline{\Psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \tau^{(+)} \Psi_N &\longrightarrow \delta_{\mu k} \overline{\Psi}_N^+ (\vec{M}_{GT}^{(+)})_k \Psi_N, \quad k=1,2,3,\end{aligned}$$

wobei die Ψ_N auf der rechten Seite nur noch zweikomponentige Spinoren sind. Im nichtrelativistischen Grenzfall für den nuklearen Strom treten nur die wohlbekannten Fermi- und Gamov-Teller-Operatoren

$$M_F^{(\pm)} = \tau^{(\pm)}, \quad \vec{M}_{GT}^{(\pm)} = \vec{\sigma} \tau^{(\pm)}$$

auf, wobei die Fermi-Übergänge dem Vektor- und die Gamov-Teller-Übergänge dem Axialvektor-Anteil der Wechselwirkung entstammen. Für die nichtrelativistischen Kernwellenfunktionen Ψ_N können wir nun die nichtwechselwirkenden Zustände (2.26) in der R-Eichung einsetzen. Damit hat der nukleare Strom die Form

$$\left\{ \overline{\Psi}_N(\vec{r}, t) \gamma_\mu (C_V - C_A \gamma_5) \tau^{(+)} \Psi_N(\vec{r}, t) \right\} \longrightarrow e^{\frac{i}{\hbar} (e \vec{A}(t) \vec{r} - \Delta E_N t)} \left\{ \delta_{\mu 0} C_V \Phi_N^*(\vec{r}) M_F^{(+)} \Phi_N(\vec{r}) - \delta_{\mu k} C_A \Phi_N^*(\vec{r}) (\vec{M}_{GT}^{(+)})_k \Phi_N(\vec{r}) \right\}$$

Hierbei wurde die Ladungserhaltung (2.33) ausgenutzt. Außerdem wurde die bei dem Zerfall freigesetzte nukleare Energie abgekürzt durch

$$\Delta E_N = M(Z, N) c^2 + E_i - M(Z+1, N-1) c^2 - E_f = Q + m c^2.$$

E_i und E_f bezeichnen die Anregungsenergie von Anfangs- und Endzustand und Q den nuklearen Q -Wert des Zerfalls.

(ii) Die zweite Näherung besteht darin, außer in den Kernwellenfunktionen ϕ_N die $\vec{r}$ -Abhängigkeit im Integranden von Gl. (3.3) zu vernachlässigen. Dabei wird immer vorausgesetzt, daß der Ursprung des Koordinatensystems im Kern liegt. Die Ortsintegration erstreckt sich nur über das Kernvolumen mit Radius R_0 in der Größenordnung von einigen $10^{-13} \text{ cm} = 1 \text{ fm}$.

Außer den Kernwellenfunktionen variieren alle Größen sehr langsam über dieses Gebiet. Die Näherung großer Wellenlängen für das äußere Feld wurde schon in Abschnitt 2.1 besprochen:

$$|\vec{k} \cdot \vec{r}| \sim k R_0 \ll 1 \quad \text{solange } \lambda \gg R_0.$$

Auch die Phase $\exp(i \vec{A} \cdot \vec{r}/\hbar)$ aus der ungestörten Wellenfunktion in der R-Eichung ist sehr klein:

$$|e^{i \vec{A} \cdot \vec{r}/\hbar}| \sim e^{a R_0/\hbar} \ll 1 \quad \text{solange } v \ll \frac{400}{R_0 [\text{fm}]}.$$

Ferner sind bei den für Betazerfall typischen Elektronen- und Neutrinoenergien die de Broglie-Wellenlängen dieser Teilchen groß gegen den Kernradius, so daß die Faktoren $\exp(i \vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar)$ und $\exp(i \vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar)$ durch Eins angenähert werden können:

$$|\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar| \ll 1 \quad \text{solange } E \ll \frac{200 \text{ MeV}}{R_0 [\text{fm}]}.$$

Für die Neutrinoenergie gilt dieselbe Abschätzung. Schließlich bleibt noch die Abschätzung des effektiven Elektronenimpulses ($\vec{p}-\vec{p}$) (2.67)

$$\left| \frac{(\vec{p}-\vec{p}) \cdot \vec{r}}{\hbar} \right| = \left| \frac{v \frac{2mc^2}{2\hbar\omega\Delta\epsilon} \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}}{\hbar} \right| \ll 1 \quad \text{solange } v \ll 30 \sqrt{\frac{\Delta\epsilon}{R_0 [\text{fm}]}}.$$

Wir werden später sehen, daß bei hohen Intensitäten keine Emission mehr in Vorwärtsrichtung entlang der Strahlachse stattfinden kann, so daß $\Delta\epsilon$ nicht gegen Null gehen kann. Damit ist auch diese Bedingung normalerweise erfüllt, und man kann die Abhängigkeit vom effektiven Impuls $\vec{p}$ vernachlässigen. Nur die effektive Energie $\hat{c}\vec{p}_0$ geht in die S-Matrix ein. Physikalisch bedeutet die Vernachlässigung der Ortsabhängigkeit der Elektron- und Neutrino-Wellenfunktionen, daß diese beiden Teilchen bei erlaubtem Zerfall keinen Bahndrehimpuls aufnehmen. Durch die Vernachlässigung all dieser sog. Retardierungsterme liefert die Ortsintegration in Gl. (3.3) nur noch das reine Kernmatrixelement.

Nach Einsetzen dieser zwei Näherungen in Gl. (3.3) hat die S-Matrix für erlaubten Betazerfall im äußeren Feld die Form

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \frac{g}{\sqrt{8EE_2\Omega_2\Omega_3}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, e^{\frac{i}{\hbar} \left(E + \frac{v^2}{2\Delta\epsilon} mc^2 + E_2 - \Delta E_N \right) t} e^{-i z \sin(\omega t + \phi) M_{fi}(t)} \quad (3.4)$$

wobei das Matrixelement M_{fi} gegeben ist durch

$$M_{fi}(*) = C_v \langle I_f M_f | M_F^{(+)} | I_i M_i \rangle \left\{ \bar{u}(\underline{p}, s) \bar{D}(\omega*) \gamma^0 (1 - \gamma_5) v(\underline{q}, s_2) \right\} \\ + C_R \langle I_f M_f | \vec{M}_{GT}^{(+)} | I_i M_i \rangle \left\{ \bar{u}(\underline{p}, s) \bar{D}(\omega*) \vec{\gamma} (1 - \gamma_5) v(\underline{q}, s_2) \right\}.$$

Durch die Näherungen für erlaubten Zerfall liefert das Raumintegral in Gl. (3.3) die bekannten Fermi- und Gamov-Teller-Übergänge. Durch Einführung des nuklearen Stromes

$$N_\mu = \left(C_v \langle I_f M_f | M_F^{(+)} | I_i M_i \rangle, -C_R \langle I_f M_f | \vec{M}_{GT}^{(+)} | I_i M_i \rangle \right)$$

kann M_{fi} noch in einer kompakteren Form geschrieben werden

$$M_{fi}(*) = \bar{u}(\underline{p}, s) \bar{D}(\omega*) N (1 - \gamma_5) v(\underline{q}, s_2). \quad (3.5)$$

Für die Beschreibung des β^+ -Zerfalls müssen $M_F^{(+)}$ und $\vec{M}_{GT}^{(+)}$ ersetzt werden durch $M_F^{(-)}$ und $\vec{M}_{GT}^{(-)}$, sowie $\bar{u}(\underline{p}, s) \bar{D}(\omega t)$ durch $\bar{u}(\underline{q}, s_v)$ und $v(\underline{q}, s_v)$ durch $D(\omega t) v(\underline{p}, s)$.

Zur exakten Berechnung der Zeitintegration in Gl. (3.4) muß für die Vokov-Wellenfunktion die Fourierreihe (2.72) verwendet werden, wobei die Entwicklungskoeffizienten gemäß Gl. (2.71) Besselfunktionen sind. Die S-Matrix kann dann als eine Summe über Multiphoton-Terme geschrieben werden

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \frac{g}{\sqrt{8 E E_3 \Omega \Omega_3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\delta\varphi} M_{fi}^{(n)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{\frac{i}{\hbar} \left(E + \frac{\omega^2}{2\Delta E} mc^2 + E_3 - \Delta E_N - n\hbar\omega \right) t} \quad (3.6)$$

Das verbleibende Matrixelement $M_{fi}^{(n)}$ ist zeitunabhängig

$$M_{fi}^{(n)} = \bar{u}(\underline{p}, s_e) \bar{D}_n N (1 - \gamma_5) v(\underline{q}, s_2), \quad (3.7)$$

wobei die Matrix D_n durch Gl. (2.73) gegeben ist.

Unter Verwendung des üblichen Verfahrens /81/ $\{2\pi\delta(\omega)\}^2 \rightarrow 2\pi\delta(\omega)$ erhalten wir aus dem S-Matrixelement (3.6) die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit T für einen festen Endzustand:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |S_{fi}|^2 \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{g^2}{8EE_3\Omega\Omega_3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |M_{fi}^{(n)}|^2 \delta\left(E + \frac{\omega^2}{2\Delta E} \omega^2 + E_3 - \Delta E_3 - n\hbar\omega\right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Interferenzen zwischen Multiphotontermen verschiedener Ordnung treten im Grenzfall $T \rightarrow \infty$ nicht auf. Bei Quadrieren von Gl. (3.6) sieht man, daß Kreuzterme $n \neq n'$ sehr schnell oszillieren.

Im nächsten Schritt wenden wir uns der Berechnung von $|M_{fi}^{(n)}|^2$ in Gl. (3.8) zu. Da wir nicht an der Beobachtung der Polarisation der emittierten Elektronen und Neutrinos interessiert sind, kann über ihre Spinprojektionen s und s_ν summiert werden. Durch Einführung von Energie-Projektionsoperatoren kann diese Summe in der üblichen Weise durch die Spurbildung ersetzt werden. Für Spinoren, die entsprechend Gl.n. (2.52) und (2.76) normiert sind, lauten diese Projektionsoperatoren für Elektron und Antineutrino

$$c\not{p} + mc^2 \text{ und } -c\not{q}.$$

Nach Einsetzen des Ausdruckes (2.73) für D_n kann die Summe über alle Spinzustände geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \sum_{s,s_3} |M_{fi}^{(n)}|^2 &= 2c^2 \text{Tr} \left\{ D_n \not{p} \bar{D}_n \not{q} \not{q}^* (1-\gamma_5) \right\} \\ &= 2c^2 \text{Tr} \left\{ \left[\not{p}_n^2 - \frac{ea}{2} (e^{i\delta\varphi} \not{p}_{n-1}(z) + e^{-i\delta\varphi} \not{p}_{n+1}(z)) \right] \not{p}_n \not{e}_1 \right. \\ &\quad + i\delta \frac{ea}{2} (e^{i\delta\varphi} \not{p}_{n-1}(z) - e^{-i\delta\varphi} \not{p}_{n+1}(z)) \not{p}_n \not{e}_2 \\ &\quad + \frac{ea}{4pk} \left\{ ea (\not{p}_{n-1}^2 + \not{p}_{n+1}^2) - 2 \text{pr}(\not{p}_{n-1} + \not{p}_{n+1}) \not{p}_n \right\} \not{k} \\ &\quad + 2i\delta \frac{ea}{4pk} (\not{p}_{n-1} - \not{p}_{n+1}) \not{p}_n \not{k} \not{p} (\sin\varphi \not{e}_1 - \cos\varphi \not{e}_2) \\ &\quad \left. + i\delta \frac{(ea)^2}{4pk} (\not{p}_{n-1} - \not{p}_{n+1}) \not{k} \not{e}_1 \not{e}_2 \right] \not{q} \not{q}^* (1-\gamma_5) \left. \right\} \end{aligned}$$

Das Ergebnis der Spurberechnung ist ein sehr langer Ausdruck, der hier nicht im Detail angegeben werden soll. Statt dessen wollen wir uns auf die Terme des Ergebnisses konzentrieren, die für die Lebensdauer des Kerns und die Verteilung der emittierten Elektronen wesentlich sind. Zum einen können wir alle Terme, die linear in dem Neutrino-Impuls $\vec{q}$ sind, vernachlässigen, da sie später bei der Integration über den Neutrino-Phasenraum keinen Beitrag zur Übergangsrate liefern werden. Diese Näherung kann auch als eine Mittelung über den Neutrino-Impuls $\vec{q}$ aufgefaßt werden. Zum zweiten kann über die Spinzustände M_i des Kerns im Anfangszustand gemittelt werden, da wir nur den Zerfall unpolarisierter Kerne betrachten wollen. Experimente mit polarisierten Kernen in einem sehr intensiven äußeren Feld sind schwer vorstellbar, da Experimente an polarisierten Targets normalerweise bei sehr tiefen Temperaturen durchgeführt werden, während bei der Wechselwirkung zwischen einem Target und einem äußeren Laserfeld der Intensität, wie wir sie hier benötigen, sofort ein Plasma entstehen würde. Die Mittelung über den Anfangsspin bedeutet für die Gamov-Teller-Matrixelemente

$$\langle N_i \rangle = 0 ,$$

$$\langle N_i N_j^* \rangle = \delta_{ij} \frac{1}{3} \vec{N} \vec{N}^* , \quad i, j = 1, 2, 3 .$$

Des weiteren summieren wir über alle erlaubten Orientierungen M_f des Kernspins im Endzustand. Nach diesen Summationen vereinfacht sich das Matrixelement $|M_{fi}^{(n)}|^2$ zu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2I_i + 1} \sum_{M_i} \sum_{M_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 \\ &= 8C_v^2 |V_{fi}|^2 E_\nu \left\{ E \mathcal{J}_n^2(z) + \frac{\omega}{4pk} \left[(ea)^2 \left((1-\delta) \mathcal{J}_{n-1}^2(z) + (1+\delta) \mathcal{J}_{n+1}^2(z) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 2ea p_\tau \left((1-\delta) \mathcal{J}_{n-1}(z) + (1+\delta) \mathcal{J}_{n+1}(z) \right) \mathcal{J}_n(z) \right] \right\} + (\text{Terme} \propto \vec{q}) . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Kernmatrixelemente wurden hierbei abgekürzt durch

$$|V_{fi}|^2 \equiv \frac{1}{2I_{\lambda}+1} \sum_{M_i, M_f} \left(| \langle I_f M_f | M_F^{(+)} | I_{\lambda} M_i \rangle |^2 + \alpha^2 | \langle I_f M_f | \vec{M}_{GT}^{(+)} | I_{\lambda} M_i \rangle |^2 \right) \quad (3.10)$$

(Für β^+ -Zerfall erhält man ebenfalls Gl. (3.9), nur müssen in Gl. (3.10) $M_F^{(+)}$ und $\vec{M}_{GT}^{(+)}$ durch $M_F^{(-)}$ und $\vec{M}_{GT}^{(-)}$ ersetzt werden.) Die Herkunft der zwei feldabhängigen Terme in Gl. (3.9) ist plausibel. Der erste ($\propto (ea)^2$) stammt aus dem A^2 -Term der Elektron-Feld-Wechselwirkung, der zweite ($\propto -2eap_T$) aus dem $\vec{p} \cdot \vec{A}$ Term. Wir können für die Amplituden dieser zwei Terme wieder die effektive Elektronenmasse (2.67) und den Wechselwirkungsparameter z (2.66) einsetzen. Unter Ausnutzung der Rekursionsbeziehung für Besselfunktionen

$$z (J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)) = 2n J_n(z)$$

erhält man nach Einsetzen von Gl. (3.9) in Gl. (3.8) die Übergangsrate

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{2\pi \hbar^5}{2\Omega_\omega m^4 c^2} G^2 |V_{fi}|^2 \frac{1}{E} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (E - n\hbar\omega) J_n^2(z) \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{z^2}{2\Delta E} mc^2 (J_{n-1}^2(z) + J_{n+1}^2(z)) \\ & + G \left[\frac{1}{2} \frac{z^2}{2\Delta E} mc^2 (J_{n+1}^2(z) - J_{n-1}^2(z)) - \frac{1}{2} \hbar\omega z (J_{n+1}(z) - J_{n-1}(z)) J_n(z) \right] \Big\} \\ & * \delta(\hbar\omega(n_0 - n) + E_\alpha) + (\text{Terme} \propto \vec{q}) \quad . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Hierbei wurde weiterhin die dimensionslose Kopplungskonstante

$$G^2 = \left(\frac{m^2 c}{\hbar^3} gC_V \right)^2 = \left(\frac{gC_V}{mc \lambda_c} \right)^2 \approx 9.0 \times 10^{-24}$$

eingeführt, bei der die dimensionsbehaftete Kopplungskonstante gC_V auf die Ruheenergie und die Compton-Wellenlänge ($\lambda_c = \hbar/mc = 386 \text{ fm}$) des Elektrons bezogen wird, sowie die dimensionslose Größe

$$n_0 = \frac{E + \frac{z^2}{2\Delta E} mc^2 - \Delta E n}{\hbar\omega} \quad , \quad (3.12)$$

deren physikalische Bedeutung im nächsten Abschnitt klar wird. Ebenso wie z ist $|n_0|$ von der Größenordnung $mc^2/\hbar\omega \gg 1$. Da wir unpolarisierte Kerne betrachten, gibt es nur eine ausgezeichnete Richtung, die Feldrichtung $\hat{e}_3$. Die Rate (3.11) ist daher unabhängig von dem azimuthalen Winkel φ bezüglich dieser Achse, und hängt über z und ΔE nur vom Betrag

des Elektronenimpulses $|\vec{p}|$ und dem polaren Winkel ϑ ab. Die Tatsache, daß die Rate (3.11) einen Term enthält, der vom Drehsinn σ der zirkularen Polarisation abhängt, ist Ausdruck der paritätsverletzenden Eigenschaften der V-A-Wechselwirkung.

3.2 Quasiklassische Näherung für die Elektron-Feld-Wechselwirkung

In diesem Abschnitt werden wir kurz referieren, wie in Ref. 18 und 23 aus der Rate w pro Endzustand (3.11) die totale Rate des nuklearen Betazerfalls bzw. des Neutronzerfalls im äußeren Feld berechnet wurde, wir werden die Fragwürdigkeit dieses Verfahrens diskutieren und einen wesentlich verbesserten Ansatz vorschlagen.

Zur Berechnung der totalen Zerfallsrate muß die Rate (3.11) über den Elektron- und Neutrino-Phasenraum integriert werden

$$\Gamma = \int \frac{\Omega d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\Omega_\nu d^3 q}{(2\pi\hbar)^3} w. \quad (3.13)$$

Unter Ausnutzung der Beziehung $E_\nu = cq$ kann die Integration über alle möglichen Neutrino-Zustände leicht ausgeführt werden

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{G^2 |V_{fi}|^2}{8\pi^4 \hbar^4 c^5} (\hbar\omega)^2 \int d^3 p \frac{1}{E} \sum_{n=n_0}^{\infty} (n-n_0)^2 \\ & \left\{ (\bar{E}-n\hbar\omega) \eta_n^2(z) + \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{2\Delta E} mc^2 \left(\eta_{n-1}^2(z) + \eta_{n+1}^2(z) \right) \right. \\ & \left. + 6 \left[\frac{1}{2} \frac{\nu^2}{2\Delta E} mc^2 \left(\eta_{n+1}^2(z) - \eta_{n-1}^2(z) \right) - \frac{1}{2} \hbar\omega z \left(\eta_{n+1}(z) - \eta_{n-1}(z) \right) \eta_n(z) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die Größe z wurde in Gl. (2.66) definiert und bezeichnet - grob gesagt - die wahrscheinlichste Anzahl transferierter Photonen. Die untere Summationsgrenze n_0 entstammt der Bedingung, daß die Neutrinoenergie E_ν positiv sein muß: falls $n < n_0$ ist, hat das Argument der δ -Funktion in Gl. (3.11) keine Nullstelle mehr. Die Größe $|n_0|$ bezeichnet demnach die Mindestzahl von

Photonen, die das Elektron absorbieren muß (falls $n_0 > 0$) bzw. die Maximalzahl von Photonen, die das Elektron emittieren kann (falls $n_0 < 0$). Das Elektron kann also eine beliebige Anzahl von Photonen absorbieren, aber aufgrund der Energieerhaltung höchstens eine begrenzte Zahl von Photonen emittieren. Falls das äußere Feld so stark ist, daß aufgrund der großen effektiven Masse $n_0 > 0$ wird, absorbieren alle emittierten Elektronen mindestens n_0 Photonen. Im feldfreien Fall haben wir dagegen immer $n_0 \leq 0$.

Die untere Summationsgrenze n_0 ist das wesentliche technische Problem bei der mathematischen Behandlung von Gl. (3.14). Da n_0 vom Elektronenimpuls $\vec{p}$ abhängt, trägt für jeden Wert von $\vec{p}$ eine andere Anzahl von Multiphotontermen zur Übergangsrate (3.14) bei. In Ref. 18 und 23 wurde versucht, die Summe über die Besselfunktionen auf bekannte Summen zurückzuführen. Es existieren allerdings nur geschlossene Ausdrücke für den Fall $n_0 = 0$ [87], d. h. für

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k J_{n+l}(z) J_{n+l'}(z) ; \quad k=0,1,2,3 ; \quad l, l'=-1,0,1 ,$$

nicht aber für die endlichen Summen

$$\sum_{n=0}^{n_0} n^k J_{n+l}(z) J_{n+l'}(z) .$$

Da, wie in Kapitel 2.5 diskutiert, z in der Größenordnung $mc^2/\hbar\omega \sim 10^6$ liegen kann, können bis zu 10^6 Terme zu der endlichen Summe beitragen, was eine numerische Behandlung dieser Restsumme ausschließt. Da die Besselfunktionen $J_n(z)$ als Funktion der Ordnung n ihren größten Wert in dem Gebiet $n \approx z$ annehmen und für $n > z$ sehr schnell gegen Null abfallen, wurde in Ref. 18 die Summe in Gl. (3.14) folgendermaßen angenähert: Für $n_0 < z$ wurde als untere Summationsgrenze immer $n = 0$ gewählt, während alle Impulswerte $\vec{p}$ mit $n_0 > z$ vernachlässigt wurden:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (n-n_0)^2 \mathcal{L}_n \approx \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (n-n_0)^2 \mathcal{L}_n & n_0 < z \\ 0 & n_0 > z \end{cases} .$$

$\mathcal{L}_n$ bezeichnet den Ausdruck in der geschweiften Klammer in Gl. (3.14). Wie im Anhang gezeigt wird, ist dies für $0 < n_0 \ll z$ und für $n_0 > z$ eine gute Näherung. Für $n_0 < 0$ werden die Multiphotonbeiträge zur Zerfallsrate um bis zu einem Faktor 2 unterschätzt, für $n_0 > 0$ wird das Ergebnis überschätzt. Besonders ungenau wird diese Näherungsmethode, wenn n_0 für alle Werte des

Elektronenimpulses $\vec{p}$ nahe an z liegt. Wir werden später sehen, daß dies immer auftritt, wenn nur die Feldstärke groß genug wird. In diesem Fall wird durch obige Näherung ein viel zu großer Wert für die Zerfallsrate abgeschätzt. Numerische Untersuchungen zeigten, daß obige Näherung nur für $n_0/z \lesssim 0.4$ vernünftig ist, für $n_0 \rightarrow z$ wächst der Fehler jedoch über mehrere Größenordnungen steil an.

In Ref. 23 wurde versucht, die zuviel ($n_0 > 0$) bzw. zuwenig ($n_0 < 0$) berechnete Restsumme

$$\sum_{n=0}^{n_0} (n-n_0)^2 \mathcal{L}_n$$

qualitativ abzuschätzen, indem die Besselfunktionen angenähert wurden durch

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{2n+1}{4} \pi\right).$$

Auch diese Näherung ist unzureichend, da diese asymptotische Entwicklung nur für Besselfunktionen mit großen Argumenten $z \gg n$ gilt und gerade in dem kritischen Bereich $n \lesssim z$ versagt. Mit dieser asymptotischen Näherung, bei der die Amplitude von J_n konstant bezüglich n ist, kann die Abschätzung der Summe teilweise verbessert werden. Numerische Untersuchungen zeigen, daß dieses Verfahren für $n_0/z \lesssim 0.8$ gerechtfertigt ist. Für größere n_0 wird der Anstieg der Amplitude von J_n mit wachsendem n wichtig, so daß auch diese Näherung viel zu große Werte für die Zerfallsrate liefert, falls n_0 nahe an z liegt.

Die mit diesen Verfahren in Ref. 18 und 23 gewonnenen Ergebnisse haben denn auch wenig plausible Eigenschaften: Wie in Kap. I beschrieben, weist die Energieverteilung der emittierten Elektronen zwei Maxima auf. Für diese Form des Spektrums gibt es keine physikalische Erklärung. Die berechneten großen Verstärkungen der totalen Zerfallsrate treten gerade bei solchen Kombinationen von nuklearer Zerfallsenergie ΔE_N und Feldintensität v auf, für die n_0 für alle $\vec{p}$ -Werte sehr nahe an z liegt, d. h. für die die verwendete Näherung besonders fragwürdig ist. Die Methode, in Gl. (3.13) immer ab $n = 0$ zu summieren, gab denn auch Anlaß zu Kritik [88], wobei allerdings der eigentliche Grund für das Versagen dieser Näherungsmethode nicht erkannt [89], sondern das Abschneiden der Beiträge $n_0 > z$ bemängelt wurde. Zweifel an den Ergebnissen von Ref. 18 wurden auch in Ref. 90 aufgrund einiger Modellrechnungen geäußert, ohne jedoch auf die in Ref. 18 verwendeten Näherungen einzugehen.

Wir wollen in dieser Arbeit einen anderen Weg zur Berechnung der Zerfallsrate einschlagen: wir werden nach einer geeigneten Näherung für die Besselfunktionen in Gl. (3.11) suchen und dann über die korrekte Anzahl von Multiphotontermen, die zu Γ beitragen, summieren. Wir haben gesehen, daß das Argument der Besselfunktionen für den Betazerfall in einem Hochleistungslaserfeld typischerweise in der Größenordnung 10^6 liegt. Da doch einige Unklarheit über das asymptotische Verhalten von Besselfunktionen besteht und physikalische Prozesse in intensiven Feldern immer noch inkorrekt behandelt werden [49], wird im Anhang das Verhalten von Besselfunktionen mit großen Argumenten zusammengestellt.

Unsere Näherung besteht darin, die Besselfunktionen $J_n(z)$ durch die stationäre Phasennäherung (A9)

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\theta(z^2 - n^2)}{(z^2 - n^2)^{1/4}} \cos\left(\sqrt{z^2 - n^2} - n \arccos \frac{n}{z} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.15)$$

zu beschreiben [91]. Wir benutzen also für $|n| < z$ die Debye-Entwicklung (A6) und setzen J_n für $|n| > z$ gleich Null. Solange n kleiner als die Ordnung $n_{\max} \approx z - (2z/9)^{1/3}$ ist, an der die Besselfunktion als Funktion der Ordnung ihr Maximum erreicht, stellt die Debye-Entwicklung eine ausgezeichnete Näherung für $z \gg 1$ dar. In dem sehr schmalen Bereich zwischen $n = n_{\max}$ und $n = z$ wird $J_n(z)$ durch Gl. (3.15) überschätzt, doch werden bei der Summation über die Besselfunktionen die Beiträge $n > z$ vernachlässigt. Die Näherung $J_n(z) = 0$ für $n > z$ wird nur im Grenzfall $z \rightarrow \infty$ exakt. Es handelt sich also um eine klassische Näherung in dem Elektron-Feld-Wechselwirkungsparameter z , da nach Gl. (2.66) im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ der Parameter $z \rightarrow \infty$ geht [92]. Wir werden diese Näherung im folgenden immer als quasiklassische oder einfach als klassische Näherung bezeichnen.

Für die Übergangsrate w (3.11) wird $J_n^2(z)$ benötigt. In einem Experiment wird es kaum möglich sein, die Intensität v des Feldes und damit den Parameter z so genau zu bestimmen, daß die Phase der Besselfunktion (3.15) scharf definiert ist. Außerdem sind wir nicht an einem einzelnen Multiphotonterm in Gl. (3.11) interessiert, sondern nur an ihrer Gesamtsumme, die sich aus bis zu 10^6 Termen zusammensetzen kann. Wir können daher über die Oszillationen in $J_n^2(z)$ mitteln. In der klassischen Näherung muß dies sogar konsistenterweise geschehen, da die schnellen Oszillationen in einer Verteilungsfunktion, hier gegeben durch $J_n^2(z)$, ein reiner Quanteneffekt sind. Damit erhalten wir eine

Näherung für das Quadrat von Besselfunktionen, die für unsere Bedürfnisse völlig ausreichend ist:

$$J_n^2(z) \approx \frac{1}{\pi} \frac{\Theta(z^2 - u^2)}{\sqrt{z^2 - u^2}} \quad (3.16)$$

Der durch Gl. (3.16) ausgedrückte Übergang von der rein quantenmechanischen Beschreibung zum klassischen Grenzfall hat große Ähnlichkeit mit dem entsprechenden Übergang beim harmonischen Oszillator [93]. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einem Eigenzustand des harmonischen Oszillators oszilliert mit wachsender Quantenzahl n immer schneller. Nach Mittelung über diese Oszillationen nähert sie sich für große n der klassischen Wahrscheinlichkeitsdichte an. Diese Verteilung des klassischen harmonischen Oszillators ist gerade durch Gl. (3.16) gegeben, wobei z die Amplitude der Schwingung und n die Auslenkung bezeichnet. Statt auf die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des harmonischen Oszillators, die durch Hermite-Polynome bestimmt ist, wenden wir hier die klassische Wahrscheinlichkeitsdichte (3.16) auf die Verteilung der Multiphoton-Wechselwirkungen zwischen einem geladenen freien Teilchen und einem äußeren Feld an.

Im Rahmen der klassischen Näherung können wir in der Übergangsrate w (3.11)

$$J_{n+1}^2(z) \approx J_n^2(z) \approx J_{n-1}^2(z)$$

setzen. Ferner wollen wir den sehr kleinen Effekt, der von dem Drehsinn der zirkularen Polarisation stammt, vernachlässigen

$$J_{n+1}^2(z) - J_{n-1}^2(z) \approx 0 \quad ,$$

$$(J_{n+1}(z) - J_{n-1}(z))J_n(z) \approx 0 \quad .$$

Nach Einsetzen der Näherung (3.16) in Gl. (3.11) und Integration über alle Multiphotonterme erhalten wir

$$W = \frac{2 \hbar^5}{\Omega \Omega_j m^4 c^2} G^2 |V_{fi}|^2 \frac{1}{\hbar \omega} \frac{E_0 - E_j}{E} \frac{\Theta(z^2 - (u_0 + \frac{E_j}{\hbar \omega})^2)}{\sqrt{z^2 - (u_0 + \frac{E_j}{\hbar \omega})^2}} \quad (3.17)$$

$$+ (\text{Terme} \propto \vec{q}) \quad .$$

In diesem quasiklassischen Grenzfall für die Elektron-Feld-Wechselwirkung ist die Zerfallsrate W unabhängig von der Feldfrequenz ω , da nach Gl. (2.66) und (3.12) z und n_0 proportional zu $(\hbar\omega)^{-1}$ sind. Der Einfluß des äußeren Feldes geht nur über den Intensitätsparameter v in Gl. (3.17) ein.

Der Vergleich zwischen Gl. (3.17) und dem Ergebnis der nichtrelativistischen Theorie in Ref. 85 zeigt, daß der Faktor $(E_0 - E_v)/E$, der nur im feldfreien Fall gleich Eins ist, auf der relativistischen Elektronen-Kinematik beruht. Außerdem sind die Größen z (2.66) und n_0 (3.12) im relativistischen und im nichtrelativistischen Fall unterschiedlich definiert: im nichtrelativistischen Grenzfall ist $\Delta\varepsilon = 1$.

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll der Gültigkeitsbereich des quasiklassischen Grenzfalles abgesteckt werden. Dies bedeutet eine Diskussion der beiden Parameter n_0 und z , die die minimale und die wahrscheinlichste Anzahl der transferierten Photonen bezeichnen. Beide Parameter hängen von dem Elektronen-Impuls $\vec{p}$ ab. Wir sind jedoch nicht an dem Verhalten von z und n_0 für einen speziellen Wert von $\vec{p}$ interessiert, sondern nur an ihrem globalen Verhalten für alle Zerfälle. Dazu benötigen wir einen analytisch möglichst einfachen Ausdruck für die $\vec{p}$ -Abhängigkeit von z und n_0 . Wir wählen z als Funktion von p_T und p_d in der Form (2.66). Ausgedrückt durch diese beiden Elektronvariablen lautet die Dispersionsbeziehung

$$E = \frac{1}{2c p_d} \left\{ (c p_d)^2 + (c p_T)^2 + (mc^2)^2 \right\}. \quad (3.18)$$

Damit können wir z und n_0 schreiben als

$$z(p_T, p_d) = \sqrt{\frac{mc^2}{\hbar\omega}} \frac{p_T}{p_d}, \quad n_0(p_T, p_d) = \frac{c}{2\hbar\omega p_d} \left\{ p_d^2 + p_T^2 + m^2 c^2 (1 + \beta^2) - 2 \frac{\Delta E_v}{c} p_d \right\}. \quad (3.19)$$

Die zwei wesentlichen Bedingungen für die Gültigkeit der quasiklassischen Näherung sind: (i) der Hauptbeitrag zur totalen Zerfallsrate Γ (3.14) muß von Zerfällen stammen, für die $z \gg 1$ ist. Im Prinzip gibt es einen kleinen Winkelbereich um $\vartheta = 0^\circ$ und $\vartheta = 180^\circ$, für den dies nicht erfüllt ist. Wir werden jedoch sehen, daß in der Praxis dieser Bereich ausgeschlossen ist. Angesichts Gl. (3.19) kann dann die Bedingung $z \gg 1$ nur verletzt sein, wenn (a) der Q-Wert des Zerfalls so klein ist gegen die Ruhemasse des Elektrons, daß - trotz Energieabsorption aus dem äußeren Feld - die kinetische Energie der Elektronen klein bleibt im Vergleich zur Ruhemasse. In diesem Fall ist $p_T/p_d \ll 1$. Bei allen realistischen Kernen ist

jedoch zumindest $Q/mc^2 \gtrsim 10^{-3}$ (unseres Wissens ist ^{187}Re mit $Q = 2.64 \text{ keV}$ der betazerfallende Kern mit dem kleinsten Q -Wert). (b) Die zweite Möglichkeit, die Bedingung $z \gg 1$ zu verletzen, tritt dann ein, wenn die Photonenenergie im Röntgen- oder noch kurzwelligeren Bereich liegt. Dann gilt nicht mehr $mc^2/\hbar\omega \gg 1$. (c) Weiterhin kann die Bedingung $z \gg 1$ verletzt sein, wenn $v \ll 1$ ist. Bei langwelligen Feldern ist dieser Bereich niedriger Intensität nicht von Interesse. Demnach ist bei allen realistischen Kernen in intensiven ($v \gtrsim 1$) Feldern optischer oder gar größerer Wellenlänge die Bedingung $z \gg 1$ erfüllt.

(ii) Die zweite Bedingung für die Gültigkeit von Gl. (3.16) und damit des quasiklassischen Grenzfalles besagt, daß der Hauptbeitrag zum Zerfall von Multiphoton-Termen der Ordnung n stammen muß, die klein sind gegenüber der Ordnung $n_{\text{max}} \approx z - (2z/9)^{1/3}$, an der die Besselfunktion als Funktion der Ordnung ihr Maximum erreicht:

$$z - n \gg z^{1/3}.$$

Dies gilt insbesondere nicht mehr, wenn für die überwiegende Zahl der Zerfälle

$$z - n_0 \lesssim z^{1/3} \quad (3.20)$$

ist. Damit erhalten wir ein Kriterium für die Gültigkeit der quasiklassischen Näherung in Abhängigkeit von der Intensität des Feldes.

Zur Auswertung von Gl. (3.20) ist es notwendig, n_0 als Funktion der Intensität v zu diskutieren. Aus Gl. (3.12) ist ersichtlich, daß für kleine v -Werte n_0 sowohl negativ als auch positiv sein kann. Mit zunehmendem v kann n_0 jedoch nur noch positive Werte annehmen. Das Minimum von n_0 bzgl. aller Zerfälle (d. h. das Minimum von n_0 in der Form (3.19) bzgl. p_T und p_d) liegt bei

$$\text{Min}(n_0) = \frac{mc^2 \sqrt{1 + v^2} - \Delta E_N}{\hbar\omega}. \quad (3.21)$$

Sobald also die effektive Masse (2.68) die beim Zerfall freiwerdende Energie E_0 übersteigt, absorbieren alle emittierten Elektronen Energie aus dem Feld. Mit wachsendem v wächst auch $\text{Min}(n_0)$ und nähert sich schließlich so nahe an z an, daß nur noch Multiphotonterme $n > n_{\text{max}}$ zur Zerfallsrate beitragen. Es lassen sich jedoch immer Werte für $\vec{p}$ finden,

für die noch $n_0 < z$ ist. Wir werden dies im Detail in Abschnitt 3.5 diskutieren. Dort werden wir auch anhand von einzelnen Zahlenbeispielen ein Gefühl für die Größenordnungen von n_0 und z und ihre Abhängigkeit von ν gewinnen. Im Moment interessiert für Gl. (3.20) nur, wie schnell sich n_0 mit wachsendem ν an z annähert. Dies kann man aus dem Minimum von n_0/z bzgl. aller Zerfälle entnehmen :

$$\text{Min}\left(\frac{n_0}{z}\right) = \frac{1}{\sqrt{z}} \sqrt{z^2 - (\epsilon_0^2 - 1)} . \quad (3.22)$$

Zur Abkürzung wurde hier $\epsilon_0 = \Delta E_N / mc^2 = 1 + Q/mc^2$ eingeführt. Weiterhin wurde vorausgesetzt, daß die Diskriminante positiv ist. Falls die effektive Elektronenmasse (2.68) kleiner als E_0 ist (d. h. $\text{Min}(n_0) < 0$), besitzt n_0/z kein Minimum mehr. Mit wachsendem ν liegt $\text{Min}(n_0/z)$ immer näher an Eins, so daß man schließlich den Bereich (3.20) erreicht. Gl. (3.22) ist unabhängig von ω und hängt nur über ν vom äußeren Feld ab. Dagegen hängt die Bedingung (3.20), die besagt, wie nahe das Minimum von n_0/z an Eins liegen muß, damit die quasiklassische Näherung ungültig wird, sehrwohl von der Größenordnung von z und damit von ω ab. Für $z = 10^3, 10^6$ (optisches Feld mit $\nu = 1$) und 10^{18} (Radiofeld mit $\nu = 10^3$) werden die Quanteneffekte dominant, wenn $\text{Min}(z - n_0)/z < 10^{-2}, 10^{-4}$ und 10^{-12} ist. Mit wachsendem z wird es also immer schwieriger, in den extrem schmalen Quantenbereich vorzudringen, da man immer größere Intensitäten ν benötigt. Die Größe ν ist demnach nicht der entscheidende Parameter für die Gültigkeit des quasiklassischen Grenzfalles. An der Stelle des Minimums (3.22) ergibt Gl. (3.20)

$$\frac{z - n_0}{z^{1/3}} \approx \frac{\epsilon_0^2 - 1}{z} \left(\frac{mc^2}{\hbar \omega} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \right)^{2/3} = \frac{\epsilon_0^2 - 1}{z} \left(\frac{E_c}{E_0} \frac{1}{\epsilon_0} \right)^{2/3} \lesssim 1 . \quad (3.23)$$

Hierbei wurde $\text{Min}(n_0/z)$ um 1 entwickelt und Gl. (2.65) verwendet. Der entscheidende Feldparameter für die Quanteneffekte ist demnach das Verhältnis zwischen Feldstärke E_0 und kritischer Feldstärke E_c . Der Quantenbereich (3.20) kann nur erreicht werden (a) für Kerne, für die $\epsilon_0^2 - 1 \ll 1$ (d. h. $Q \ll mc^2$) ist, und (b) mit Feldern, deren Stärke vergleichbar mit der kritischen Feldstärke ist, d. h. $E_0 \gtrsim E_c$. Bei realistischen Kernen ist man mit optischen Feldern der Stärke $\nu \approx 1$ weit von diesem Bereich entfernt. Demnach ist auch die zweite Bedingung für die Gültigkeit des quasiklassischen Grenzfalles für alle realistischen Kerne in intensiven, langwelligen Feldern, die im Labor erzeugbar sind, gut erfüllt.

3.3 Alternative Ableitung der quasiklassischen Übergangsrate

In Abschnitt 3.1 wurde das S-Matrixelement (3.6) in eine unendliche Summe über Besselfunktionen entwickelt. Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß die Ergebnisse anschaulich als Multiphoton-Prozesse interpretiert werden können. Außerdem ist dies die geläufigste Methode, die Übergangsrate w (3.11) und damit im Prinzip auch die totale Zerfallsrate Γ exakt zu berechnen. Andererseits ist die Entwicklung in dieser Form nur für zirkular polarisierte Felder möglich. Linear polarisierte Felder verlangen eine Entwicklung nach verallgemeinerten Besselfunktionen [94]. Bei Feldern, die aus einer Superposition von ebenen Wellen verschiedener Frequenzen bestehen, wird die Entwicklung noch komplizierter. In Kapitel V sollen die Ergebnisse, die wir hier im quasiklassischen Grenzfall für zirkular polarisierte Felder erhalten, auf beliebige ebene Wellen verallgemeinert werden. Wir wollen deshalb schon jetzt nach einem Verfahren suchen, das unabhängig von der Entwicklung nach Besselfunktionen die quasiklassische Übergangsrate (3.17) liefert. Dazu soll die stationäre Phasenmethode, mit deren Hilfe ja im Anhang die asymptotische Entwicklung (3.15) für die Besselfunktionen gewonnen wird, direkt auf das S-Matrixelement (3.4) angewandt werden. Die folgenden Rechnungen werden auch die Näherungen, die dem quasiklassischen Grenzfall zugrunde liegen, nochmals veranschaulichen.

Zur näherungsweisen Berechnung der Zeitintegration in dem S-Matrixelement (3.4) verwenden wir die stationäre Phasennäherung (A7):

$$\int_a^b dt g(t) e^{i\eta f(t)} = \sum_{t_n \in [a,b]} \sqrt{\frac{2\pi i}{\eta f''(t_n)}} g(t_n) e^{i\eta f(t_n)} . \quad (3.24)$$

Die stationären Punkte t_n bezeichnen die Nullstellen von f' , $f'(t_n) = 0$. Die weiteren Terme in der stationären Phasennäherung (3.24) sind im Anhang beschrieben. Bei Anwendung auf die Berechnung der S-Matrix (3.4) haben die Funktionen f und g die Gestalt ($\eta = 1/\hbar$)

$$\eta f(t) = \omega t - z \sin(\omega t + \sigma \varphi) , \quad g(t) = M_{fi}(t) .$$

Zur Abkürzung wurde die Größe

$$x \equiv \frac{E + \frac{z^2}{2\Delta E} \omega c^2 + E_J - \Delta E_N}{\hbar \omega} = u_0 + \frac{E_J}{\hbar \omega} \quad (3.25)$$

eingeführt. Das Matrixelement $M_{fi}(t)$ (3.5) oszilliert mit $\exp(\pm i\omega t)$, so daß $g(t)$ im Vergleich zu $\exp(inf(t))$ für $z \gg 1$ sehr langsam zeitlich veränderlich ist. Der Exponent $f(t)$ im Integranden der S-Matrix oszilliert mit der Periode $2\pi/\omega$ und hat pro Periode n zwei stationäre Punkte

$$t_n^{(\pm)} = \frac{1}{\omega} (\pm \arccos \frac{x}{z} - \sigma\varphi + 2n\pi) .$$

Die Funktion $f(t)$ kann nur stationär werden, solange $|x| \leq z$ ist. Wir werden dies wieder durch eine Θ -Funktion berücksichtigen. Es ist leicht zu sehen, daß $f''(t_n^{(\pm)})$ und $M_{fi}(t_n^{(\pm)})$ unabhängig von der Periode n sind:

$$f''(t_n^{(\pm)}) = \pm \omega^2 \sqrt{z^2 - x^2} ,$$

$$\vec{A}(t_n^{(\pm)}) = \frac{a}{z} (x \hat{e}_x \mp b \sqrt{z^2 - x^2} \hat{e}_z) = \vec{A}^{(\pm)} .$$

Die stationäre Phasen-Näherung (3.24) liefert demnach für die S-Matrix (3.4)

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} g \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{8EE_3\Omega\Omega_3}} \frac{\Theta(z^2 - x^2)}{\omega(z^2 - x^2)^{1/4}} e^{-ixb\varphi}$$

$$\left\{ M_{fi}^{(+)} e^{-i(\sqrt{z^2 - x^2} - x \arccos \frac{x}{z} - \frac{\pi}{4})} + M_{fi}^{(-)} e^{i(\sqrt{z^2 - x^2} - x \arccos \frac{x}{z} - \frac{\pi}{4})} \right\} \quad (3.26)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi x n} .$$

Für die Übergangsmatrixelemente wurde hierbei $M_{fi}^{(\pm)} \equiv M_{fi}(t_n^{(\pm)})$ gesetzt.

Im Grenzfall $\eta \rightarrow \infty$ wird die stationäre Phasen-Näherung (3.24) exakt. Da x und z proportional an $\hbar^{-1}$ sind, beschreibt Gl. (3.26) die S-Matrix im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$. Wir haben jetzt also schon in der S-Matrix den Übergang zum quasiklassischen Grenzfall vollzogen.

Der Gültigkeitsbereich von Gl. (3.26) ist durch dieselben zwei Kriterien bestimmt wie im letzten Abschnitt. Einerseits muß $z \gg 1$ sein. Diese Bedingung ist nicht mehr erfüllt, wenn der Q-Wert des Zerfalls sehr klein gegen die Elektronenmasse mc^2 wird, oder wenn die Photonenenergie $\hbar\omega$ so

groß wird, daß sie mit Q vergleichbar ist. Zum anderen darf die Feldintensität nicht so extrem groß sein, daß die beiden stationären Punkte $t_n^{(-)}$ und $t_n^{(+)}$ einer Periode für alle erlaubten Werte von $\vec{p}$ und $\vec{q}$ sehr dicht beieinanderliegen. Dies ist der Fall, wenn x sehr nahe an z liegt. Die "Reichweite" eines stationären Punktes t_n ist definiert durch

$$|t - t_n| \approx \sqrt{\frac{2}{|f''(t_n)|}}.$$

Die Reichweiten der zwei benachbarten stationären Punkte $t_n^{(-)}$ und $t_n^{(+)}$ überschneiden sich, sobald

$$z - x \lesssim z^{1/3}$$

ist. Dies entspricht der Bedingung (3.20). Zur Ableitung von Gleichung (3.24) wird der Exponent $f(t)$ um einen stationären Punkt t_n bis zur zweiten Ableitung entwickelt. Falls jedoch $z - x \lesssim z^{1/3}$ wird, so sind die Terme dritter und höherer Ordnung in

$$f(t) = f(t_n) + \frac{1}{2} f''(t_n)(t-t_n)^2 + \frac{1}{6} f'''(t_n)(t-t_n)^3 + \dots$$

innerhalb der Reichweite des stationären Punktes t_n nicht mehr gegen die zweite Ordnung vernachlässigbar, so daß Gl. (3.24) ihre Gültigkeit verliert und damit auch die klassische Näherung (3.26) für die S-Matrix [95].

Zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit muß Gl. (3.26) quadriert werden. Im Grenzfall $T \rightarrow \infty$ treten keine Interferenzen zwischen stationären Punkten $t_n^{(\pm)}$ aus verschiedenen Perioden $n \neq n'$ auf, wohl aber zwischen den Beiträgen der beiden Punkte $t_n^{(+)}$ und $t_n^{(-)}$. Die Anzahl der Perioden in einem Zeitintervall T beträgt

$$\frac{T\omega}{2\pi}.$$

Durch Aufsummierung aller stationären Punkte erhält man für die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit

$$\begin{aligned}
 \omega &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |S_{fi}|^2 \\
 &= \frac{g^2}{8\hbar^2 E E_\nu \Omega \Omega_\nu} \frac{\Theta(z^2 - x^2)}{\omega \sqrt{z^2 - x^2}} \\
 &\quad \left\{ |M_{fi}^{(+)}|^2 + |M_{fi}^{(-)}|^2 + 2 \operatorname{Re} \left[M_{fi}^{(+)} M_{fi}^{(-)*} e^{-2i(\sqrt{z^2 - x^2} - x \arccos \frac{x}{z} - \frac{\pi}{4})} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Der Interferenzterm oszilliert sehr schnell, da die Größenordnung des Exponenten durch $mc^2/\hbar\omega \sim 10^6$ gegeben ist. Wir werden diesen Term wieder vernachlässigen, da in einem Experiment nur die über diese Oszillationen gemittelte Rate bestimmt werden kann.

Zur Bestimmung der Matrixelemente summieren wir wieder über den Elektron- und den Neutrinospin:

$$\begin{aligned}
 \sum_{S_i, S_\nu} |M_{fi}^{(\pm)}|^2 &= 2c^2 \operatorname{Tr} \left\{ \mathcal{D}^{(\pm)} \not{p} \overline{\mathcal{D}}^{(\pm)} \not{q} \not{q}^* (1 - \gamma_5) \right\} \\
 &= 2c^2 \operatorname{Tr} \left\{ \left[\not{p} - e \vec{A}^{(\pm)} + \frac{1}{2p\hbar k} (2ep\hbar^{(\pm)} - e^2 \hbar^{(\pm)^2}) \not{k} \right] \not{q} \not{q}^* (1 - \gamma_5) \right\} \\
 &= 8c^2 \left\{ \left[p_0 + \frac{\omega}{2cp\hbar k} (2ep\hbar^{(\pm)} - e^2 \hbar^{(\pm)^2}) \right] \left[q_0 (|\vec{N}_0|^2 + |\vec{N}|^2) + i\vec{q}(\vec{N} \times \vec{N}^*) - 2\operatorname{Re}(\vec{N}_0^* \vec{N} \vec{q}) \right] \right. \\
 &\quad + \left[\vec{p} - e \vec{A}^{(\pm)} + \frac{1}{2p\hbar k} (2ep\hbar^{(\pm)} - e^2 \hbar^{(\pm)^2}) \vec{k} \right] \cdot \left[\vec{q} (|\vec{N}_0|^2 - |\vec{N}|^2) + 2\operatorname{Re} \vec{N}(\vec{N}^* \vec{q}) \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2q_0 \operatorname{Re}(\vec{N}_0^* \vec{N}) - iq_0(\vec{N} \times \vec{N}^*) + 2\operatorname{Im}(\vec{N}_0^* \vec{q} \times \vec{N}) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Nach Mittelung über den Eingangsspin und Summation über den Ausgangsspin des Kerns sowie Vernachlässigung der Terme, die linear in dem Neutrino-Impuls $\vec{q}$ sind, erhält man

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2I_i + 1} \sum_{M_i, M_f} \sum_{S_1, S_2} |M_{fi}^{(\pm)}|^2 \\
 &= 8C_v^2 |V_{fi}|^2 E_J \left(E + \frac{\omega}{2pk} (2e p \underline{H}^{(\pm)} - e^2 \underline{H}^{(\pm)2}) \right) + (T_{\text{eme}} \propto \vec{q}) \\
 &= 8C_v^2 |V_{fi}|^2 E_J (E_0 - E_J) + (T_{\text{eme}} \propto \vec{q}) \quad . \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von Gl. (3.28) in Gl. (3.27) erhalten wir exakt die quasiklassische Zerfallsrate (3.17). Die stationäre Phasen-Methode einschließlich der Vernachlässigung der schnell oszillierenden Beiträge in der Rate (3.27) ist also äquivalent zu den Näherungen in den Besselfunktionen, die in Abschnitt 3.2 eingeführt wurden.

3.4 Klassische Elektron-Feld-Wechselwirkung

In diesem Abschnitt soll die quasiklassische Näherung für die Elektron-Feld-Wechselwirkung, die Gl. (3.17) zugrunde liegt, noch besser veranschaulicht werden. Wir beginnen dazu mit der Rate für den feldfreien Betazerfall unpolarisierter Kerne [86]

$$\Gamma_f = \frac{2\pi \hbar^5}{\Omega \Omega_J \omega^4 c^2} G^2 |V_{fi}|^2 \delta(T + E_J - \Delta E_N). \quad (3.29)$$

Um Verwirrung zu vermeiden, wurde hier die Elektronenenergie mit T bezeichnet. T ist die tatsächliche kinetische Energie (plus Ruhemasse) der emittierten Elektronen, also eine physikalische Größe im Sinne von Ref. 62. Dagegen ist die Größe $E = \sqrt{(c\vec{p})^2 + (mc^2)^2}$, die wir der Bequemlichkeit halber immer mit "Elektronenenergie" bezeichnet haben, eine unphysikalische Größe, die nur nach Abschalten des Feldes mit der kinetischen Energie übereinstimmt. Wir wollen allerdings in den Rechnungen die Elektronenenergie immer durch E ausdrücken, da wir nur an Meßgrößen nach dem Abschalten des Feldes interessiert sind.

Nach Einschalten des äußeren Feldes ist die Zerfallsrate durch die unendliche Summe (3.11) gegeben, bei der jeder Term die Absorption ($n > 0$) oder Emission ($n < 0$) von n Photonen durch das Elektron beschreibt. Durch diese Wechselwirkung mit dem Feld ist die Energie E der Elektronen nach Abschalten des Feldes natürlich nicht mehr durch $\Delta E_N - E_V$ gegeben wie im feldfreien Fall. Statt dessen haben die Elektronen eine Energieverteilung. Wir werden im folgenden nur mit Argumenten aus der klassischen Mechanik diese Energie-Verteilungsfunktion ableiten, die in Gl. (3.29) die δ -Funktion ersetzen muß.

Wie schon in Abschnitt 2.5 erwähnt, ist die Funktion $S_p(\underline{x})$ (2.57c) in der Volkov - Wellenfunktion identisch mit der klassischen Wirkung für ein Teilchen im Feld einer ebenen Welle. Die entsprechende klassische Hamilton-Funktion in der R-Eichung lautet dann

$$H(\vec{r}, \vec{p}, t) = -\frac{\partial S_p}{\partial t} = E(\vec{p}) - \frac{\omega}{2pk} \left(2e\vec{A}(\underline{k}_x) \vec{p} - e^2 \vec{A}^2(\underline{k}_x) \right). \quad (3.30)$$

In der R-Eichung ist diese totale Hamilton-Funktion identisch mit der kinetischen Energie des freien Teilchens im Feld. Falls wir wieder das Vektorpotential (2.59) einer zirkular polarisierten ebenen Welle einsetzen, erhalten wir

$$H(\underline{x}) = E + \frac{j^2}{2\Delta E} \omega c^2 - \frac{1}{2} \omega z \omega (\underline{k}_x + \gamma \varphi). \quad (3.31)$$

Die klassische Näherung besteht nun aus folgender Überlegung. Beim feldfreien Zerfall werden nach Gl. (3.29) die Elektronen mit der Energie $\Delta E_N - E_V$ und dem Impuls $\vec{p}_V$ ins Vakuum emittiert. Klassisch würde man vermuten, daß ein Zerfallsprozeß, der aufgrund der schwachen Wechselwirkung stattfindet, durch ein äußeres elektromagnetisches Feld nicht beeinflußt wird und die Elektronen instantan genauso ins Feld emittiert werden wie im feldfreien Fall ins Vakuum. Wir nehmen daher an, daß für ein Elektron, das im äußeren Feld erzeugt wird, zum Zeitpunkt τ des Zerfalls seine kinetische Energie $H(\tau)$ im Feld und sein kinetischer Impuls $\vec{\pi}(\tau) = \vec{p}_C - e\vec{A}(\tau)$ im Feld ebenfalls durch $\Delta E_N - E_V$ bzw. $\vec{p}_V$ gegeben sind. Dann ist E bestimmt durch

$$E = \Delta \bar{E}_N - \bar{E}_J + \frac{\omega}{2pk} \left(g e \vec{H}(\tau, \vec{r}_d) \vec{p} - e^2 \vec{H}^2(\tau, \vec{r}_d) \right) \quad (3.32)$$

$$= \Delta \bar{E}_N - \bar{E}_J - \frac{j^2}{2\Delta E} mc^2 + \hbar \omega z \cos(\omega \tau - \vec{k} \vec{r}_d + \phi) .$$

Der Ort, an dem der Zerfall stattfindet, ist mit $\vec{r}_d$ bezeichnet. Unter Ausnutzung von Gl. (2.55) finden wir die Beziehung zwischen den Komponenten des asymptotischen Impulses $\vec{p}$ mit Feld und denen des Vakuumimpulses $\vec{p}_V$:

$$p_1 = p_{V,1} + e \bar{H}_1(\tau) ; p_2 = p_{V,2} + e \bar{H}_2(\tau) ; p_3 = p_{V,3} + \frac{1}{c} (\bar{E} - \Delta \bar{E}_N + \bar{E}_J) . \quad (3.33)$$

In diesem klassischen Bild ist die Elektronenenergie beschränkt auf den Bereich

$$\Delta \bar{E}_N - \bar{E}_J - \frac{j^2}{2\Delta E} mc^2 - \hbar \omega z \leq \bar{E} \leq \Delta \bar{E}_N - \bar{E}_J - \frac{j^2}{2\Delta E} mc^2 + \hbar \omega z .$$

Diese Bedingung soll in der Verteilung für E wieder durch eine Θ -Funktion berücksichtigt werden. Der Ausdruck (3.32) für E hängt noch von dem Zeitpunkt τ des Zerfalls ab. Wir benötigen jedoch die über alle Zeiten τ gemittelte Verteilung für die Wahrscheinlichkeit, daß das Elektron mit einer bestimmten Energie E emittiert wird. Diese Verteilung ergibt sich folgendermaßen: ein bestimmter Wert für E ist um so wahrscheinlicher, je langsamer er als Funktion der Zeit τ variiert. Wir setzen daher die Verteilung von E als umgekehrt proportional zur zeitlichen Änderung von E an

$$P(\bar{E}) \propto \frac{\Theta\left((\hbar \omega z)^2 - \left(\bar{E} + \frac{j^2}{2\Delta E} mc^2 + \bar{E}_J - \Delta \bar{E}_N\right)^2\right)}{\left| \frac{d\bar{E}}{d\tau} \right|} .$$

Zur Bestimmung von P(E) muß $dE/d\tau$ durch E(3.32) ausgedrückt werden:

$$\left| \frac{d\bar{E}}{d\tau} \right| = \omega \sqrt{(\hbar \omega z)^2 - \left(\bar{E} + \frac{j^2}{2\Delta E} mc^2 + \bar{E}_J - \Delta \bar{E}_N\right)^2} .$$

Nach Normierung von $P(E)$ erhalten wir für die klassische Energieverteilung

$$P(E) = \frac{1}{\pi} \frac{\Theta\left((\hbar\omega z)^2 - \left(E + \frac{v^2}{2\Delta E} mc^2 + E_J - \Delta E_N\right)^2\right)}{\sqrt{(\hbar\omega z)^2 - \left(E + \frac{v^2}{2\Delta E} mc^2 + E_J - \Delta E_N\right)^2}}. \quad (3.34)$$

Diese Verteilung ist symmetrisch um den Mittelpunkt $\Delta E_N - E_J - \frac{v^2}{2\Delta E} mc^2$ und wächst nach beiden Seiten hin an bis zu den Grenzpunkten $\Delta E_N - E_J - \frac{v^2}{2\Delta E} mc^2 \pm \hbar\omega z$.

Die Verteilung $P(E)$ kann auch mit einer vielleicht noch anschaulicheren Überlegung abgeleitet werden. Im klassischen Grenzfall müssen wir nach obiger Überlegung nur die kinetische Energie T in der Deltafunktion in Gl. (3.29) durch die kinetische Energie $H(\tau)$ im Feld ersetzen. Außerdem nehmen wir an, daß das Matrixelement $|V_{fi}|$ der schwachen Wechselwirkung durch das äußere Feld nicht beeinflusst wird. Dann muß die instantane Zerfallsrate noch über die Periode des Feldes gemittelt werden:

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{\tau'}^{\tau' + \frac{2\pi}{\omega}} d\tau \delta(H(\tau) + E_J - \Delta E_N) \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{\tau'}^{\tau' + \frac{2\pi}{\omega}} d\tau \delta\left(E + \frac{v^2}{2\Delta E} mc^2 + E_J - \Delta E_N - \hbar\omega z \cos(\omega\tau + \phi)\right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Dieses Integral kann berechnet werden mit Hilfe der Formel

$$\delta(f(x)) = \sum_n \delta(x - x_n) \frac{1}{|f'(x_n)|}, \quad (3.36)$$

wobei sich die Summe über alle Nullstellen x_n von $f(x)$ erstreckt. Diese Nullstellen sind gerade mit den stationären Punkten aus Abschnitt 3.2 identisch. Der genaue Zusammenhang zwischen der stationären Phasennäherung und der hier nur plausibel gemachten Annahme (3.35) wird in Abschnitt 5.2 erläutert. Unter Verwendung von Gl. (3.36) erhält man wieder die Form (3.34) für die Verteilung $P(E)$ (3.35).

Mit dieser klassischen Verteilungsfunktion können die Feldeffekte relativ zum freien Zerfall gut beschrieben werden. Falls wir die Größe n_0 (3.12) in Gl. (3.34) einsetzen, sehen wir, daß das Ersetzen der δ -Funktion $\delta(T+E_\nu-\Delta E_N)$ im feldfreien Fall (3.29) durch die Verteilung $P(E)$ (3.34) tatsächlich zu der Rate (3.17) für den Zerfall im äußeren Feld führt - bis auf den Faktor $(\Delta E_N - E_\nu)/E$, der im feldfreien Fall Eins ist. Wir sehen weiterhin, daß die Näherung (3.16) für die Besselfunktionen gerade die Energieverteilung (3.34) für klassische Elektron-Feld-Wechselwirkung beschreibt.

Mit dieser Interpretation der klassischen Näherung, daß die Elektronen zum Zeitpunkt ihrer Erzeugung im Feld die Energie $\Delta E_N - E_\nu$ haben, lassen sich die Feldeffekte auf den Kernzerfall im Rahmen dieser Näherung schon erkennen: das Energiespektrum der Elektronen wird durch das äußere Feld modifiziert werden, da sich ihre Energie $H(\tau) = \Delta E_N - E_\nu$ beim Durchlaufen des Feldes ändern wird. Andererseits werden die Elektronen bei Anwesenheit eines äußeren Feldes mit derselben Energie $\Delta E_N - E_\nu$ in dieses Feld emittiert wie im feldfreien Fall in das Vakuum. Der für den Zerfall verfügbare Phasenraum ist also der gleiche und die Lebensdauer des Kerns wird durch das äußere Feld nicht beeinflusst. Daher können im Rahmen der klassischen Näherung mit einem äußeren Feld auch keine Zerfälle stabiler Kerne induziert werden.

Zum Schluß soll noch die Gültigkeit dieses klassischen Bildes diskutiert werden. Die Bewegung des Elektrons muß sicherlich quantenmechanisch beschrieben werden, wenn der Rückstoß bei der Emission oder Absorption von Photonen zu groß wird. Dies führt sofort zu der Bedingung (i) $\hbar\omega \ll Q$. Weiterhin muß die Änderung der Elektronenenergie im Feld über eine typische quantenmechanische Zeiteinheit - die Zeit, die ein relativistisches Elektron zum Durchlaufen der Comptonwellenlänge benötigt - klein sein gegen die vorhandene Elektronenenergie

$$\frac{\partial H}{\partial t} \ll \frac{Q}{\hbar/mc^2} \quad .$$

Für H aus Gl. (3.30) ergibt dies

$$\frac{E_0}{E_c} \frac{mc^2}{Q} \frac{p_T}{p_d} \ll 1 \quad .$$

Dies liefert als weitere Bedingungen für die Anwendbarkeit der klassischen Beschreibung (ii) $E_0 \ll E_c$ und (iii) $Q \gtrsim mc^2$. Insbesondere ist die klassische Beschreibung also nur auf Prozesse anwendbar, die auch ohne äußeres Feld stattfinden ($Q > 0$). Außerdem muß natürlich die gesamte im Feld vorhandene Energie groß sein im Vergleich zum Energieübertrag auf die emittierten Teilchen.

3.5 Verteilung der emittierten Elektronen

In diesem Abschnitt sollen die Eigenschaften der emittierten Elektronen, d. h. die Verteilung der Energie und des Emissionswinkels sowie der zeitliche Ablauf des Zerfalls, diskutiert werden. Ausgangspunkt dazu soll die quasiklassische Übergangsrate (3.17) sein, die für alle experimentell realistischen Situationen eine ausgezeichnete Näherung ist.

Um uns auf die Information, die die Rate (3.17) bzgl. der Elektronen enthält, zu beschränken, müssen wir über den Neutrino-Phasenraum integrieren. Dazu benutzen wir Polarkoordinaten für den Neutrino-Impuls $\vec{q}$ und ersetzen die Neutrino-Energie E_ν durch die Größe x (3.25):

$$d^3q \rightarrow \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^3 \sin\vartheta_\nu (x-n_0)^2 dx d\vartheta_\nu d\varphi_\nu$$

Die Integration der Rate (3.17) über die Emissionswinkel ϑ_ν und φ_ν ist trivial. Die totale Zerfallsrate (3.13) hat dann die Gestalt

$$\Gamma = \frac{\hbar^2 \omega^3}{8\pi^5 u^4 c^5} G^2 |V_{fi}|^2 \int d^3p \frac{1}{E} \int_{n_0}^{\infty} dx \frac{(x-n_0)^2 \left(\frac{E + \frac{1}{2}\Delta E}{\hbar\omega} mc^2 - x \right)}{\sqrt{z^2 - x^2}} \Theta(z^2 - x^2) .$$

Die Grenzen der x -Integration sind durch zwei Bedingungen gegeben, die gleichzeitig erfüllt sein müssen: (i) Da die Neutrino-Energie E_ν positiv ist, muß $x \geq n_0$ sein. (ii) Im klassischen Grenzfall ist x gemäß der Θ -Funktion auf den Bereich $-z \leq x \leq z$ beschränkt. Wir haben daher drei verschie-

- dene Fälle zu unterscheiden: (i) Es gibt keine Zerfälle mit $n_0 > z$.
(ii) Für $-z \leq n_0 \leq z$ erstreckt sich die x -Integration von n_0 bis z .
(iii) Falls $n_0 \leq -z$ ist, umfaßt die x -Integration den Bereich zwischen $-z$ und z . Mit Hilfe der elementaren Integrale

$$\int_a^b dx \frac{(x-a)^2 (c-x)}{\sqrt{b^2 - x^2}} = -\left(\frac{3}{2} ca + \frac{1}{3} a^2 + \frac{2}{3} b^2\right) \sqrt{b^2 - a^2} \\ + \left(ca^2 + \frac{1}{2} cb^2 + ab^2\right) \arccos \frac{a}{b} ,$$

$$\int_{-b}^b dx \frac{(x-a)^2 (c-x)}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \pi \left(ca^2 + \frac{1}{2} cb^2 + ab^2\right)$$

erhalten wir einen Ausdruck für die totale Zerfallsrate Γ , der nur noch von den Elektron-Variablen abhängt. Es ist dabei vorteilhaft, die Energie in Einheiten der Elektronenmasse auszudrücken und die dimensionslosen Größen

$$\varepsilon \equiv \frac{E}{mc^2} , \quad \varepsilon_0 \equiv \frac{\Delta E_0}{mc^2} ,$$

$$z' \equiv \frac{\hbar \omega}{mc^2} \quad z = \frac{\gamma \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sin \vartheta}{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \cos \vartheta} ,$$

$$u_0' \equiv \frac{\hbar \omega}{mc^2} \quad u_0 = \varepsilon - \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \cos \vartheta}$$

einzuführen. Für $\Delta \varepsilon$ wurde hierbei Gl. (2.64) eingesetzt. Entsprechend kann auch das Impulselement unter Verwendung der relativistischen Dispersionsbeziehung in Polarkoordinaten ausgedrückt werden als

$$d^3 p \rightarrow (mc)^3 \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sin \vartheta d\varepsilon d\vartheta d\varphi .$$

Die Verteilung der emittierten Photonen ist rotationssymmetrisch um die Ausbreitungsrichtung des Feldes, da weder z noch n_0 von φ abhängen. Der azimuthale Emissionswinkel φ ist somit uninteressant und wir wollen auch die φ -Integration ausführen. Die Verteilung der Elektronen bzgl. Energie ε und Emissionswinkel ϑ ist dann gegeben durch

$$\frac{d^2 \Gamma}{d\varepsilon d\vartheta} = \frac{1}{4\pi^4} \frac{\omega c^2}{\hbar} G^2 |V_{fi}|^2 F(\varepsilon, \vartheta; \varepsilon_0, \vartheta)$$

$$F(\varepsilon, \vartheta; \varepsilon_0, \vartheta) = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sin \vartheta \left\{ \Theta(z'^2 - n_0'^2) \left[-\left(\frac{3}{2} \left(\varepsilon + \frac{\vartheta^2}{2\Delta\varepsilon} \right) n_0' + \frac{1}{3} n_0'^2 + \frac{2}{3} z'^2 \right) \sqrt{z'^2 - n_0'^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\left(\varepsilon + \frac{\vartheta^2}{2\Delta\varepsilon} \right) (n_0'^2 + \frac{1}{2} z'^2) + n_0' z'^2 \right) \arccos \frac{n_0'}{z'} \right] \right. \\ \left. + \Theta(-z' - n_0') \pi \left[\left(\varepsilon + \frac{\vartheta^2}{2\Delta\varepsilon} \right) (n_0'^2 + \frac{1}{2} z'^2) + n_0' z'^2 \right] \right\} . \quad (3.37)$$

Da n_0' und z' von ε und ϑ abhängen, liefert die klassische Abschneidebedingung $n_0' \leq z'$, d. h.

$$(\varepsilon - \varepsilon_0)(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \cos \vartheta) + \frac{\vartheta^2}{2} \leq \vartheta \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sin \vartheta , \quad (3.38)$$

Grenzen für die möglichen Werte von ε und ϑ . Es sei daran erinnert, daß diese Bedingung direkt auf die klassische Annahme (3.32) zurückgeht. Zur Bestimmung der Grenzen für ε und ϑ ist es nützlich, die folgenden Hilfsgrößen einzuführen:

$$\varepsilon_1^{(\pm)} = \varepsilon_0 \left(\frac{\vartheta^2}{2} + 1 \right) \pm \vartheta \sqrt{(\varepsilon_0^2 - 1) \left(\frac{\vartheta^2}{4} + 1 \right)} , \\ \varepsilon_2^{(\pm)} = \frac{1}{1 + \vartheta^2} \left\{ \varepsilon_0 \left(\frac{\vartheta^2}{2} + 1 \right) \pm \frac{\vartheta^2}{2} \sqrt{\varepsilon_0^2 - 1 - \vartheta^2} \right\} , \\ \varepsilon_3^{(\pm)} = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_0 \pm \sqrt{\varepsilon_0^2 - 2\vartheta^2} \right\} . \quad (3.39)$$

Dabei sind $\varepsilon_2^{(\pm)}$ und $\varepsilon_3^{(\pm)}$ gleich Null zu setzen, wenn die Feldintensität so groß wird, daß keine reellen Wurzeln mehr existieren. In dem physikalisch interessanten Bereich $n_0 \geq 0$ spielt nur $\varepsilon_1^{(\pm)}$ eine Rolle. Für eine feste Energie ε ist der Emissionswinkel ϑ der Elektronen begrenzt durch

$$\cos \vartheta_{\min} = \begin{cases} 1 & \varepsilon_3^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_3^+ \\ \frac{\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_0) + \frac{z^2}{2}}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1} (\varepsilon - \varepsilon_0)} & \varepsilon_2^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2^+ \\ \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) \left\{ \varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_0) + \frac{z^2}{2} \right\} + z \sqrt{-\varepsilon^2 + 2 \left(1 + \frac{z^2}{2} \right) \varepsilon_0 \varepsilon - (\varepsilon_0^2 + z^2 + \frac{z^4}{4})}}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \left\{ (\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + z^2 \right\}} & \varepsilon_1^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1^+ \end{cases} \quad (3.40)$$

$$\cos \vartheta_{\max} = \begin{cases} -1 & \varepsilon_2^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2^+ \text{ oder } \varepsilon_3^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_3^+ \\ \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) \left\{ \varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_0) + \frac{z^2}{2} \right\} - z \sqrt{-\varepsilon^2 + 2 \left(1 + \frac{z^2}{2} \right) \varepsilon_0 \varepsilon - (\varepsilon_0^2 + z^2 + \frac{z^4}{4})}}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \left\{ (\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + z^2 \right\}} & \varepsilon_1^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1^+ \end{cases}$$

In überlappenden Energiebereichen ist das größtmögliche Winkelintervall zu verwenden. Die Grenzen für die Energie ergeben sich zu

$$\varepsilon_{\min} = \begin{cases} \varepsilon_1^- & \varepsilon_0 \leq \sqrt{1 + z^2} \\ \min(\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-) & \varepsilon_0 \geq \sqrt{1 + z^2} \text{ und } (\varepsilon_0 < \sqrt{2}) \text{ oder } \varepsilon_2^- < \varepsilon_3^- \text{ oder } \varepsilon_3^+ < \varepsilon_2^- \\ \max(1, \min(\varepsilon_1^-, \varepsilon_3^-)) & \varepsilon_0 \geq \sqrt{1 + z^2} \text{ und } \varepsilon_0 \geq \sqrt{2} \text{ und } \varepsilon_3^- \leq \varepsilon_2^- \leq \varepsilon_3^+ \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1^+ \quad (3.41)$$

Aus der Definition von $\varepsilon_1^{(\pm)}$ in Gl. (3.39) ist zu entnehmen, daß im klassischen Grenzfall im Feld keine Zerfälle stattfinden können, die ohne Feld energetisch verboten sind ($\varepsilon_0 < 1$). Der Zerfall stabiler Kerne kann nur durch Quanteneffekte ($n_0 > z$) induziert werden.

Abb. 2 illustriert die Bedingung $n_0 \leq z$ in der (ε, ϑ) -Ebene an zwei verschiedenen Beispielen: ^{18}F zerfällt über β^+ -Zerfall in ^{18}O mit einem nuklearen Q-Wert von $Q = 634 \text{ keV}$ [96], entsprechend $\varepsilon_0 = 2.24$. (Man beachte, daß ΔE_N als Massendifferenz der Kerne, nicht der neutralen Atome definiert ist!) Bei β^+ -zerfallenden Kernen besteht das Problem, daß bei sehr kleinen Q-Werten normalerweise der Elektronen-Einfang aus der Atomhülle der dominierende Zerfallsprozeß ist, der die Lebensdauer des Kerns bestimmt. ^{18}F ist ein Beispiel, bei dem trotz kleinem Q-Wert für den β^+ -Zerfall der Elektroneneinfang vernachlässigbar ist. Als

zweites Beispiel wurde Tritium gewählt, das einen der kleinsten in der Natur vorkommenden Q -Werte besitzt: ${}^3\text{H}$ zerfällt über β^- -Zerfall in ${}^3\text{He}$ mit $Q = 18.6$ keV, entsprechend $\epsilon_0 = 1.036$. Für die Feldintensität ist in beiden Beispielen $\nu = 0.5$ gewählt. Die Grenze $n_0 = z$ wird durch die durchgezogene Linie in Abb. 2 beschrieben. In Abb. 2 a können alle (ϵ, ϑ) -Werte links der durchgezogenen Linie bei einem Betazerfall auftreten, die Werte rechts davon sind im klassischen Grenzfall verboten. Im Vergleich zum feldfreien Betazerfall erkennen wir, daß die Elektronen jetzt auch mit wesentlich höheren Energien emittiert werden: die Maximalenergie beträgt für ${}^{18}\text{F}$ $\epsilon = 3.64$ im Gegensatz zu $\epsilon = 2.24$ im feldfreien Fall. Allerdings sind diese hohen Elektronenenergien nicht für alle Emissionswinkel ϑ möglich. Die hochenergetischen Elektronen werden nur in ein sehr kleines Winkelintervall in Vorwärtsrichtung um $\vartheta \approx 20^\circ$ emittiert. Andererseits gibt es (ϵ, ϑ) -Werte, die im feldfreien Zerfall möglich sind, nicht aber im äußeren Feld: im Beispiel ${}^{18}\text{F}$ und $\nu = 0.5$ ist dies die Emission in Vorwärtsrichtung des Feldes $\vartheta \approx 0$ für Energien $\epsilon \gtrsim 1.86$. Dieser Effekt beruht auf der effektiven Masse, die die Elektronen im äußeren Feld haben, und soll im weiteren Verlauf dieses Kapitels noch veranschaulicht werden.

Weiterhin sind in Abb. 2 Höhenlinien mit konstantem n_0/z -Verhältnis eingetragen. Zu ihrer Interpretation ist es wieder günstig, die Entwicklung der Zerfallsrate (3.14) nach Besselfunktionen heranzuziehen. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron an einem Punkt (ϵ, ϑ) emittiert wird, ist um so größer, je kleiner sein n_0/z -Verhältnis ist, da dann um so mehr Multiphotonterme von $n = n_0$ bis $n = z$ zum Zerfall beitragen können. Die Zerfallswahrscheinlichkeit steigt also in dem Gebiet links der durchgezogenen Kurve mit wachsendem Abstand von der Grenze $n_0 = z$ an. Der Bereich rechts der durchgezogenen Kurve ist nur in der Quantentheorie erlaubt. Wie im Anhang diskutiert, fallen die Besselfunktionen $J_n(z)$ für $n > z$ extrem steil ab. Daher werden auch die Quantenkorrekturen zu Gl. (3.14) am größten in einem ganz schmalen Streifen rechts der durchgezogenen Linien in Abb. 2 sein und mit wachsendem Abstand von $n_0 = z$ exponentiell abfallen. Numerische Untersuchungen an Besselfunktionen mit großem Argument zeigen, daß dieser Streifen tatsächlich sehr klein ist und die Quanteneffekte bereits weit vor der punktierten Linie vernachlässigbar sind.

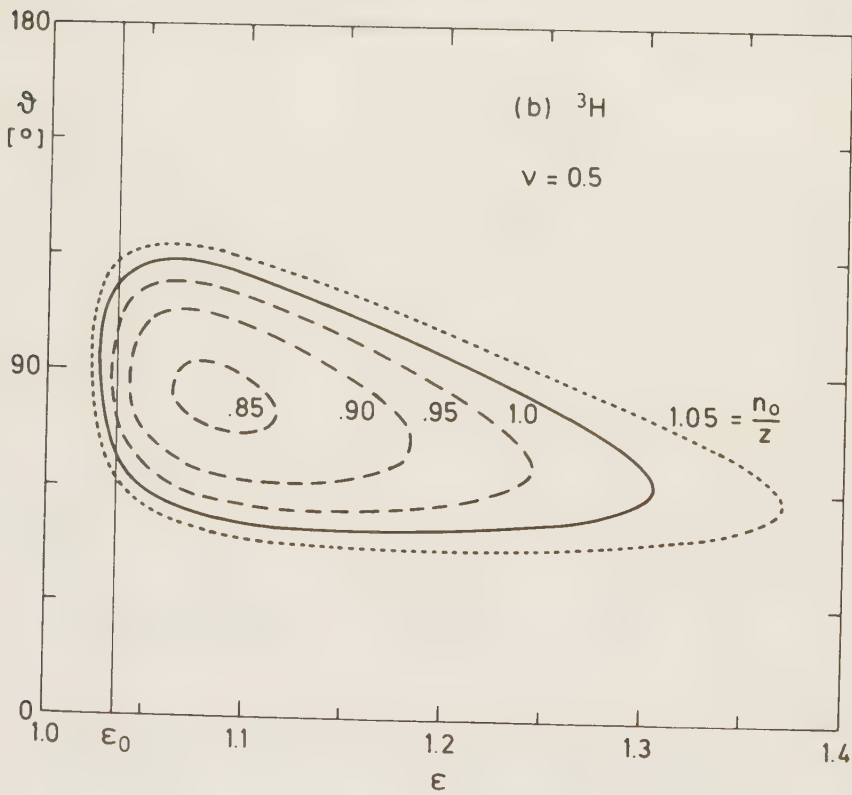
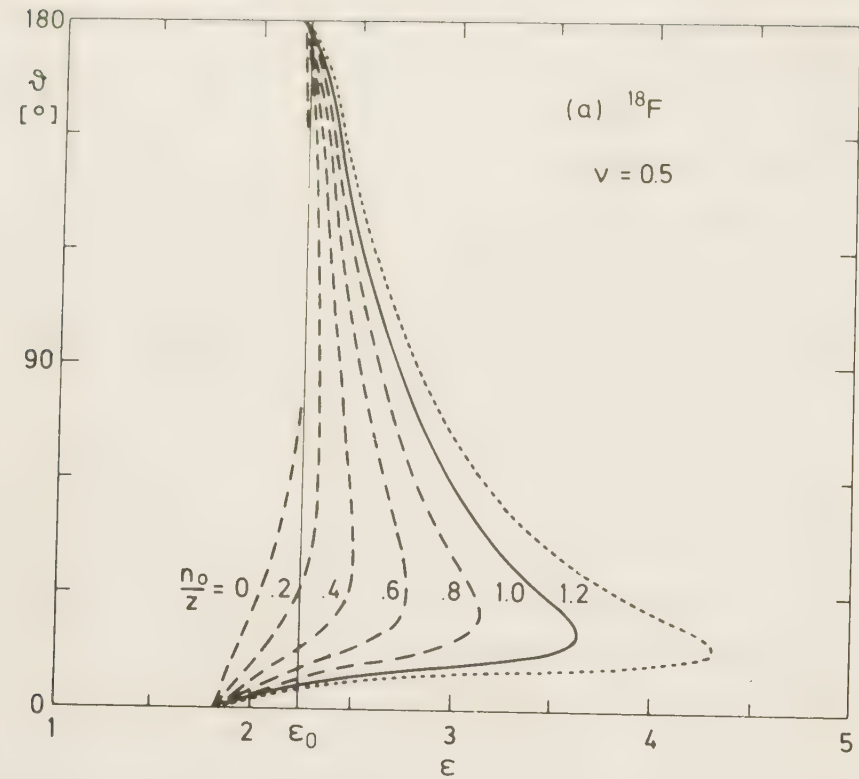


Abb. 2: Gebiet erlaubter Emissionswinkel Θ und Energie ϵ der emittierten Elektronen. Der klassisch erlaubte Bereich ist durch $n_0/z < 1$ gegeben (Grenze: durchgezogene Kurve $n_0 = z$). Die unterbrochenen und punktierten Kurven geben weitere Linien mit konstantem n_0/z -Verhältnis an. Links der durchgezogenen Geraden bei $\epsilon = \epsilon_0$ findet der (isotrope) feldfreie Zerfall statt. Als Feldintensität ist $v = 0.5$ und als Beispiel für beta-zerfallende Kerne a) ^{18}F mit $\epsilon_0 = 2.24$ und b) ^3H mit $\epsilon_0 = 1.036$ gewählt.

Besonders interessant ist Abb. 2 b . Bei Tritium ist aufgrund des kleinen Q -Werts des Zerfalls schon bei $v = 0.5$ die effektive Elektronenmasse größer als die beim Zerfall freiwerdende Energie, so daß für alle möglichen (ϵ, ϑ) -Werte $n_0 > 0$ ist. Im vorliegenden Fall liegt das Minimum von n_0/z in der (ϵ, ϑ) -Ebene gemäß Gl. (3.22) bei 0.84. Die erlaubten (ϵ, ϑ) -Werte liegen innerhalb der durchgezogenen Kurve. Die Energieverteilung der emittierten Elektronen beginnt also keineswegs mehr bei $E = mc^2$, sondern jetzt bei einem größeren Wert $\epsilon > 1$. Im vorliegenden Beispiel ist dies bei $\epsilon = 1.026$. Dafür ist die Energieverteilung viel breiter als im feldfreien Fall. Im Gegensatz zum isotropen feldfreien Zerfall findet jetzt bei vielen Winkeln ϑ überhaupt keine Emission mehr statt. Die Elektronen werden nur in den Winkelbereich zwischen 48° und 119° emittiert. Bei Kernen mit noch kleineren ϵ_0 -Werten oder bei Feldern mit größerem v wird dieses Verhalten noch dramatischer: das Minimum von n_0/z liegt dann noch höher an Eins. Dies hat zur Folge, daß der erlaubte Winkelbereich schmaler und schmaler wird, wobei er immer in der Vorwärtshemisphäre liegt. Die Energieverteilung wird immer breiter und beginnt erst bei immer größeren Energien. Die $(n_0 = z)$ -Kurve geht also in der (ϵ, ϑ) -Ebene in einen dünnen, langgestreckten Schlauch über, der in Vorwärtsrichtung liegt und bei einer endlichen Energie beginnt. Dieses Verhalten liegt noch im Gültigkeitsbereich des klassischen Grenzfalles. Erst wenn das Minimum von n_0/z ganz nahe an Eins liegt ($z - n_0 \lesssim z^{1/3}$) und damit der Schlauch sehr schmal wird, beginnen Quanteneffekte zu dominieren.

Der Einfluß des äußeren Feldes auf die Energieverteilung der Elektronen kann noch besser aus Abb. 3 entnommen werden. Dazu wurde die Funktion F in Gl. (3.37) numerisch zwischen den Winkelgrenzen (3.40) integriert. Ähnliche Kurven für die Energieverteilung der emittierten Elektronen wurden inzwischen auch in Ref. 97 publiziert. Zum Vergleich ist in Abb. 3 auch die feldfreie Verteilung $v = 0$ eingezeichnet. Für ^{18}F erstreckt sich das Spektrum mit wachsendem v zu immer größeren Energien. Allerdings ist die zu den gezeigten v -Werten gehörende effektive Masse $mc^2\sqrt{1+v^2}$ stets kleiner als die beim feldfreien Zerfall freiwerdende Energie E_0 , so daß es (ϵ, ϑ) -Werte mit $n_0 \leq 0$ gibt und das Spektrum bei $\epsilon = 1$ beginnt. Man erkennt jedoch, daß die Emission niederenergetischer Elektronen mit wachsendem v immer geringer wird. Wir werden die Bedeutung der effektiven Masse gleich anschaulich verstehen.

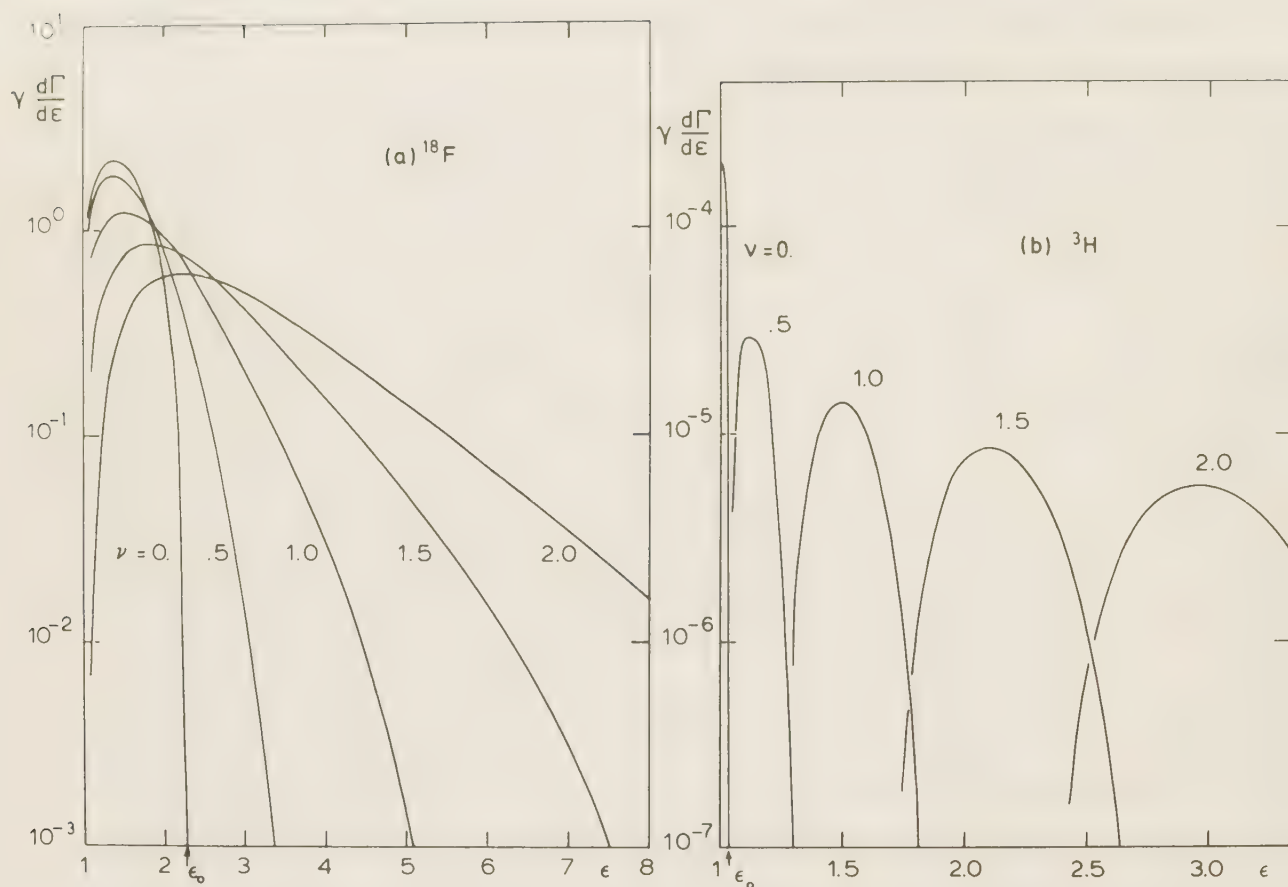


Abb. 3: Energieverteilung der emittierten Elektronen für verschiedene Intensitätsparameter ν und für die gleichen beta-zerfallenden Kerne wie in Abb. 2. a) ^{18}F mit $\epsilon_0 = 2.24$ und b) ^3H mit $\epsilon_0 = 1.036$. Der Faktor $1/\gamma$ steht als Abkürzung für die Vorfaktoren des Phasenraumfaktors $F(\epsilon, \nu; \epsilon_0, \nu)$ in Gl. (3.37).

Bei ^3H ist die Wirkung des äußeren Feldes wesentlich spektakulärer: im Vergleich zum feldfreien Fall wird das Spektrum um ein Vielfaches verbreitert und es beginnt erst bei Energien, die wesentlich größer als die Endenergie des feldfreien Spektrums sind. Die Maxima der Spektren werden jedoch mit wachsendem ν immer kleiner, und die Fläche unter den Kurven, die der totalen Zerfallsrate entspricht, scheint durch das äußere Feld nicht beeinflusst zu werden. Wir werden dieser Frage im nächsten Abschnitt nachgehen.

Vorher wollen wir noch die Abschneidebedingungen (3.40) und (3.41) sowie die interessanten Merkmale in Abb. 2 und 3, die gerade diskutiert wurden, anschaulich aus der klassischen Näherung (3.32) verstehen. In Abschnitt 3.4 wurde Gl. (3.32) nur zur Ableitung der Verteilung $P(E)$ (3.34) verwendet, ohne nach den physikalisch erlaubten Energien zu fragen. Wir haben jedoch aus physikalischen Gründen $E \geq mc^2$ und $E_\nu \geq 0$. Damit kann Gl. (3.32) bei vorgegebenem ΔE_N und ν in der Regel nicht mehr für beliebige Werte von E, ν und φ erfüllt werden. Wenn der Intensitätsparameter ν so groß wird, daß der effektive Massenterm $(\nu^2/2\Delta\epsilon)mc^2$ die Zerfallsenergie $\Delta E_N - E_\nu$ übersteigt, kann Gl. (3.32) nur noch erfüllt werden, wenn (i) $\cos(\omega\tau - \vec{k}\vec{r}_d + \sigma\varphi) > 0$ und (ii) $z \neq 0$ ist. Aus der zweiten Bedingung ergibt sich eine Untergrenze $p_{\min}$ für den Impuls p_T des Elektrons und damit auch für die Energie nach Verlassen des Feldes: $E_{\min} > mc^2$. Das Verbot von Zerfällen an (ϵ, δ) -Punkten in Abb. 2, die im feldfreien Fall erlaubt sind, und der zu höheren Energien $E_{\min}$ hin verschobene Beginn der Elektronenverteilung in Abb. 3 b beruhen also auf der großen effektiven Masse: nur Elektronen mit $p_T > p_{\min}$ können bei vorgegebener kinetischer Energie $T = \Delta E_N - E_\nu$ im Feld die effektive Masse aufbringen und damit emittiert werden. In Abschnitt 3.4 wurde die klassische Näherung vom Standpunkt der Energie T im Feld interpretiert. Wir können den Zerfall aber genauso gut vom Standpunkt der Energie E außerhalb des Feldes beschreiben: falls die effektive Elektronenmasse den Q-Wert des Zerfalls übersteigt (d. h. $n_0 > 0$), muß das Elektron mindestens n_0 Photonen aus dem Feld absorbieren, um diese Energiedifferenz zu überwinden. Das Elektron absorbiert also effektiv Energie. Andererseits wird die Zerfallswahrscheinlichkeit immer geringer, je näher n_0 an z liegt, da immer weniger Multiphoton-Terme zur Übergangsrate (3.14) beitragen. Die effektive Masse und damit der A^2 -Term in der Wechselwirkung spielen somit eine zentrale Rolle beim Zerfall.

Auch die zweite Bedingung $\cos(\omega\tau - \vec{k}\vec{r}_d + \sigma\varphi) > 0$ hat interessante Konsequenzen. Zu einem festen Zerfallszeitpunkt τ kann die Emission nicht mehr in beliebige Richtungen φ erfolgen, sondern nur noch in die Hälfte des Raumes. Bei noch stärkerem Feld kann Gl. (3.32) nur noch für $\cos(\omega\tau - \vec{k}\vec{r}_d + \sigma\varphi) \cong 1$ erfüllt werden. Dann gibt es bei festem τ nur noch einen sehr kleinen Bereich für φ , in den das Elektron emittiert werden kann, d. h. auch die x- und y-Komponenten des Elektronenimpulses werden gebündelt. Mit fortschreitender Zeit τ rotiert dieser Bereich mit der Frequenz ω des äußeren Feldes um die Ausbreitungsrichtung des Feldes. Die Elektronen sind also nur im zeitlichen Mittel gleichverteilt bezüglich φ .

Diese Fokussierung im Emissionswinkel kann auch aus Gl. (3.33) entnommen werden. Beim Zerfall ins Vakuum sind die Impulse $\vec{p}_v$ isotrop verteilt. Sobald jedoch $eA \gg |\vec{p}_v|$ ist, wird die (x,y)-Projektion des Impulses $\vec{p}$ entlang der Richtung des Vektorpotentials $\vec{A}$ ausgerichtet. Die Tatsache, daß die Elektronenimpulse außerhalb des Feldes nicht genau durch $e\vec{A}(\tau)$ gegeben sind, sondern in Vorwärtsrichtung zeigen, liegt an dem relativistischen Korrekturterm $(E - \Delta E_N + E_v)$ für p_3 in Gl. (3.33).

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß das äußere Feld die Elektro-nengrößen E, Ω und - bei zeitlicher Auflösung - φ beeinflusst. Die Energie-verteilung wird stark verbreitert. Sobald die effektive Elektronenmasse die Zerfallsenergie übersteigt, wird der Bereich der Emissionswinkel Ω und φ eingeschränkt und die Energieverteilung beginnt erst bei einem Wert $E_{\min} > mc^2$. Spektakulär wird der Effekt bei weiter anwachsendem Wechselwirkungs-parameter ν : die Elektronen werden dann in ein sehr kleines Raumelement $\Delta\Omega$ emittiert, das mit der Frequenz ω um die Feldrichtung rotiert. Ihre Energie ist extrem verschmiert, wobei der niederenergetische Teil des Spektrums fehlt. Nur ein schmaler Bereich Δn von Multiphoton-Termen sehr hoher Ordnung trägt zum Zerfall bei.

Alle diese Überlegungen gelten im klassischen Grenzfall, sind also unab-hängig von der Feldfrequenz ω . Nur der Intensitätsparameter ν , der die effektive Masse bestimmt, spielt eine Rolle. Die Analogie zwischen dem hier beschriebenen Prozess und der Synchrotronstrahlung ist offensichtlich. Auch diese kann klassisch beschrieben werden, solange das konstante Magnetfeld, in dem das Elektron umläuft, klein ist gegen das kritische Feld $B_C = m^2 c^2 / e \hbar = 4.4 \cdot 10^{13} \text{ G}$ [98]. Bei der Synchrotronstrahlung läuft das Elektron auf einer fest vorgegebenen Bahn und die Strahlung wird tangential emittiert. Beim Betazerfall im starken Feld ist die Richtung des rotierenden Vektorpotentials vorgegeben und die Elektronen werden entlang dieser Rich-tung emittiert.

In Radiofeldern, bei denen heute schon Werte von $\nu \sim 10^3$ im MHz-Bereich er-zielbar sind [20], sollten sich alle diskutierten Effekte, einschließlich der zeitlichen Auflösung, im Prinzip nachweisen lassen. Dazu sind aller-dings experimentelle Bedingungen notwendig, die die Verwendung der Volkov-Wellenfunktion erlauben. Dies bedeutet, daß sich das Radiofeld als ebene

Welle beschreiben lassen muß. Bei diesen Radiofeldern liegt z in der Größenordnung $z \propto v mc^2 / \hbar \omega \sim 10^{18}$, so daß der klassische Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ besonders gut erfüllt ist. Als geeigneter Kandidat für einen solchen Test bietet sich ${}^3\text{H}$ mit einer Halbwertszeit von 12.3 y an, da aufgrund der kleinen Zerfallsenergie die effektive Masse eine besonders starke Rolle spielt. In diesem Beispiel ist nach Gl. (3.22) $\text{Min}(z - n_0)/z \approx 4 \cdot 10^{-8}$. Im Gegensatz zu Experimenten mit optischen Feldern sind die Nachweisprobleme beim β^- -Zerfall geringer, da kein Elektronenplasma gleichzeitig erzeugt wird und da man nur nach Pulsen gebündelter Elektronen suchen muß. Außerdem ist das Radiofeld im Gegensatz zu Hochleistungslasern kontinuierlich. Das eigentliche experimentelle Problem besteht darin, das Feld überhaupt an den Kern heranzubringen, da in einem neutralen Atom ein äußeres elektrisches Feld fast vollständig von den Elektronen der Atomhülle abgeschirmt wird [99]. Mit wachsender Wellenlänge des äußeren Feldes wird der Abschirmeffekt stärker. So kann der Kern das gesamte von außen angelegte elektrische Feld erst nach vollständiger Ionisation des Atoms spüren. Andererseits gibt es bei der Bestrahlung eines Atoms Resonanzen, durch deren Anregung das elektrische Feld am Kernort sogar stärker werden kann als das von außen angelegte Feld [48,100]. Man beachte ferner, daß in dem hier diskutierten Experiment der Kern nur als Quelle dient, mit der die Elektronenenergie im Feld vorgegeben werden kann, so daß nur die (klassische) Elektronen-Kinematik einschließlich der effektiven Masse in einem sehr starken elektromagnetischen Feld untersucht werden kann.

Es soll noch betont werden, daß sich in den Überlegungen dieses Abschnitts nur die explizite Bestimmung der partiellen Zerfallswahrscheinlichkeit $d^2\Gamma/d\epsilon d\mathcal{J}$ und damit Abb. 3 speziell auf den Betazerfall beziehen. Alle anderen Überlegungen bzgl. der Feldeffekte auf die Variablen $E, \mathcal{J}$ und φ beruhen nur auf der klassischen Annahme (3.32) und der daraus folgenden Bedingung (3.38), sind also unabhängig von dem speziellen Zerfallsmechanismus. Sie sind gültig für alle auch ohne äußeres Feld ablaufenden Zerfalls- und Streuprozesse in einem langwelligen Feld, die in der Keldysh-Näherung beschrieben werden können.

3.6 Totale Zerfallsrate

Für die Berechnung der totalen Zerfallsrate Γ ist es nicht günstig, von der partiellen Rate (3.37) auszugehen, da die Integrationen über ϑ und ϵ zwischen den Grenzen (3.40) und (3.41) nicht analytisch ausführbar sind. Durch geeignete Wahl der Integrationsvariablen und der Integrationsreihenfolge ist es jedoch möglich, ausgehend von Gl. (3.17) einen analytischen Ausdruck für Γ zu finden. Gl. (3.37) wird insbesondere durch die Verwendung der relativistischen Dispersionsbeziehung in Gl. (2.64) so kompliziert. Wir wollen daher z und n_0 wieder wie in Gl. (3.19) als Funktionen von p_T und p_d betrachten. Es bietet sich an, den Elektronenimpuls $\vec{p}$ durch die 3 Variablen

$$p_d = \frac{E}{c} - p_3, \quad s \equiv p_T^2 = p_1^2 + p_2^2, \quad \varphi = \arccos \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}$$

zu beschreiben. Das Impulselement hat dann unter Verwendung von Gl. (3.18) die Form

$$d^3p \rightarrow \frac{E}{2cp_d} dp_d ds d\varphi.$$

Für das Neutrino-Impulselement verwenden wir wieder Polarkoordinaten. Nach Ausführung der trivialen Integrationen über $d\Omega_\nu$ und $d\varphi$ kann die totale Zerfallsrate Γ im quasiklassischen Grenzfall (3.17) geschrieben werden als

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi^4 \hbar m^4 c^6} \frac{1}{\hbar \omega} G^2 |V_{fi}|^2 \int_0^\infty dE_\nu E_\nu^2 (\Delta E_\nu - E_\nu) \int_0^\infty dp_d \frac{1}{p_d} \int_0^\infty ds \frac{\Theta(z^2(p_d, s) - (n_0(p_d, s) + \frac{E_\nu}{\hbar \omega})^2)}{\sqrt{z^2(p_d, s) - (n_0(p_d, s) + \frac{E_\nu}{\hbar \omega})^2}}. \quad (3.42)$$

Die Θ -Funktion liefert zusätzliche Einschränkungen für die drei Integrationsvariablen s , p_d und E_ν . Falls die drei Integrationen in der in Gl. (3.42) angedeuteten Reihenfolge ausgeführt werden, erhält man als Integrationsgrenzen

$$s^{(\pm)} = mc^2 (\gamma^2 - 1) + 2 \frac{\Delta E_N - E_J}{c} p_d - p_d^2 \pm 2 mc \sqrt{-p_d^2 + 2 \frac{\Delta E_N - E_J}{c} p_d - mc^2} \geq 0$$

$$p_d^{(\pm)} = \frac{1}{c} \left\{ \Delta E_N - E_J \pm \sqrt{(\Delta E_N - E_J)^2 - (mc^2)^2} \right\} \geq 0$$

$$E_J^{(+)} = \Delta E_N - mc^2$$

Dann kann der Integrand in Gl. (3.41) umgeschrieben werden zu

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi^4 \hbar^4 mc^7} |G^2| |V_{fi}|^2 \int_0^{\Delta E_N - mc^2} dE_J \bar{E}_J^2 (\Delta E_N - E_J) \int_{p_d^{(-)}}^{p_d^{(+)}} dp_d \int_{s^{(-)}}^{s^{(+)}} ds \frac{1}{\sqrt{(s^{(+)} - s)(s - s^{(-)})}} \quad (3.43)$$

Für die Diskussion von Gl. (3.43) sind zwei Punkte von Bedeutung:

(i) obwohl die Integrationsgrenzen $s^{(\pm)}$ von v abhängen, ist das Integral über ds unabhängig vom äußeren Feld, da

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \pi$$

(ii) Die Integrationsgrenzen $p_d^{(\pm)}$ und $E_J^{(+)}$ sind ebenfalls unabhängig von v . Nach Ausführung der s -Integration ist Gl. (3.43) also unabhängig vom äußeren Feld. Dies bedeutet, daß im quasiklassischen Grenzfall nicht nur die totale Rate Γ unbeeinflusst durch das äußere Feld bleibt, sondern auch die Verteilungen $d\Gamma/dp_d$, $d\Gamma/d\varphi$ und $d^3\Gamma/d^3q$. Nur die Elektronenverteilung $d\Gamma/ds$ und die verwandten Größen $d\Gamma/dE$, $d\Gamma/dJ$ und $d\Gamma/dp_i$ ($i = 1, 2, 3$) werden durch das äußere Feld modifiziert.

Wir wollen noch explizit zeigen, daß Gl. (3.43) tatsächlich die totale Zerfallsrate im feldfreien Fall liefert. Nach Einführen der dimensionslosen Größen $\varepsilon_0 = \Delta E_N/mc^2$ und $\eta = (\Delta E_N - E_J)/mc^2$ erhält man aus Gl. (3.43)

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2\pi^3} \frac{mc^2}{\hbar} G^2 |V_{fi}|^2 F(\epsilon_0) \quad ,$$

$$\begin{aligned} F(\epsilon_0) &= \int_1^{\epsilon_0} d\eta \, \eta (\epsilon_0 - \eta)^2 \sqrt{\eta^2 - 1} \\ &= \frac{1}{30} (\epsilon_0^2 - 1)^{5/2} - \frac{1}{12} (\epsilon_0^2 - 1)^{3/2} - \frac{1}{4} (\epsilon_0^2 - 1)^{1/2} + \frac{1}{4} \epsilon_0 \ln(\epsilon_0 + \sqrt{\epsilon_0^2 - 1}) \quad . \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dies ist gerade die totale Zerfallsrate für feldfreien erlaubten Betazerfall [101]. Wie mehrfach betont, ist die korrekte Behandlung der effektiven Elektronenmasse von entscheidender Bedeutung für dieses Ergebnis. Die häufig in der Quantenoptik verwendete Näherung, den $\vec{A}^2$ -Term der Wechselwirkung zu vernachlässigen, liefert bei Prozessen in intensiven äußeren Feldern völlig falsche Ergebnisse.

Nach der Diskussion in Abschnitt 3.4, daß im klassischen Grenzfall die Elektronen mit derselben Energie ins Feld emittiert werden wie im feldfreien Fall ins Vakuum, ist dieses Ergebnis wenig überraschend. Vom Standpunkt der Energie E außerhalb des Feldes können wir Gl. (3.38) folgendermaßen verstehen: das Elektron absorbiert zwar effektiv Energie aus dem Feld und hat somit einen größeren Phasenraum zur Verfügung, wodurch der Zerfall beschleunigt würde. Andererseits sind aufgrund der Effekte der effektiven Masse nicht mehr alle Emissionswinkel erlaubt. Mit wachsender Feldstärke kann die Emission nur noch in ein immer kleineres Raumwinkelement im Phasenraum erfolgen. Dies ist äquivalent zu der Tatsache, daß mit wachsender Feldstärke die Übergangswahrscheinlichkeit pro Energie immer kleiner wird, da immer weniger Multiphoton-Terme (sehr hoher Ordnung) zum Zerfall beitragen können. Diese zwei Effekte - vergrößerter Phasenraum bzgl. der Energie und verkleinerter Raumwinkel im Phasenraum - kompensieren sich, so daß die totale Zerfallsrate durch das äußere Feld nicht verändert wird.

Die Änderung der Lebensdauer eines Kerns in einem äußeren elektromagnetischen Feld kann also nur aufgrund von Quanteneffekten erfolgen. Der Gültigkeitsbereich des klassischen Grenzfalles und damit von Gl. (3.44) wurde am Ende von Abschnitt 3.2 ausführlich diskutiert. Mit heute im Labor erzeugbaren

Feldern verschiedener Wellenlänge und Intensität kann die totale Zerfallsrate Γ nicht modifiziert werden, da sich die Wechselwirkung zwischen Elektron und Feld ausgezeichnet im klassischen Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ beschreiben läßt. Dennoch sollen im nächsten Abschnitt die Quantenkorrekturen zur Zerfallsrate Γ (3.44) und damit zur natürlichen Lebensdauer $\tau = 1/\Gamma$ untersucht werden.

3.7 Quanteneffekte

In Abschnitt 3.2 wurde gezeigt, daß es drei Wege gibt, um außerhalb des Gültigkeitsbereiches des quasiklassischen Grenzfalles zu gelangen:

- (i) mit (unrealistisch) kleinen Q-Werten $Q \ll mc^2$, so daß $\epsilon_0 - 1 \ll 1$;
- (ii) mit Feldern, deren Frequenz im Röntgen- oder Gammabereich liegt, so daß $\hbar\omega/Q \gtrsim 1$;
- (iii) mit Feldern, deren Stärke E_0 mit der kritischen Feldstärke E_c vergleichbar ist. In diesen Fällen ist es nicht mehr möglich, die Näherung (3.16) für die Besselfunktionen bzw. die stationäre Phasenmethode anzuwenden. Statt dessen muß man von der exakten Form (3.11) für die Übergangsrate W ausgehen und nach einer verbesserten Berechnung der Summe über die Besselfunktionen suchen.

In Abb. 4 wird die Verstärkung R der totalen Zerfallsrate Γ im Vergleich zur feldfreien Rate Γ_0 (3.44)

$$R = \frac{\Gamma}{\Gamma_0}$$

als Funktion von ν in dem Bereich (i) unrealistisch kleiner Q-Werte gezeigt. Für das äußere Feld wurde mit $\hbar\omega = 2$ eV eine Frequenz im visuellen Bereich gewählt. Die durchgezogene Kurve zeigt eine näherungsweise numerische Berechnung für die totale Zerfallsrate. Dazu wurde von Gl. (3.14) ausgegangen und die Summation über n sowie die Integrationen über $\mathcal{J}$ und E numerisch ausgeführt. Für die numerische Behandlung von Besselfunktionen ist es nützlich, die endliche Summe über die Ordnung von Besselfunktionen mit festem Argument durch ein endliches Integral über das Argument von Besselfunktionen mit einer festen Ordnung zu ersetzen [87]. Alle in Gl. (3.14) vorkommenden Summen lassen sich in dieser Weise in Integrale transformieren. Dann kann man für die Besselfunktionen geeignete Näherungen einführen, die auch den Bereich $n > z$ richtig behandeln [83]. Um eine untere Grenze für die Quanteneffekte in Γ zu bekommen, wurden die $\mathcal{J}$ - und E -Integrationen zwischen den Grenzen (3.40) und (3.41) ausgeführt. Die $(\epsilon, \mathcal{J})$ -Konfigurationen mit $n_0 > z$ wurden also wei-

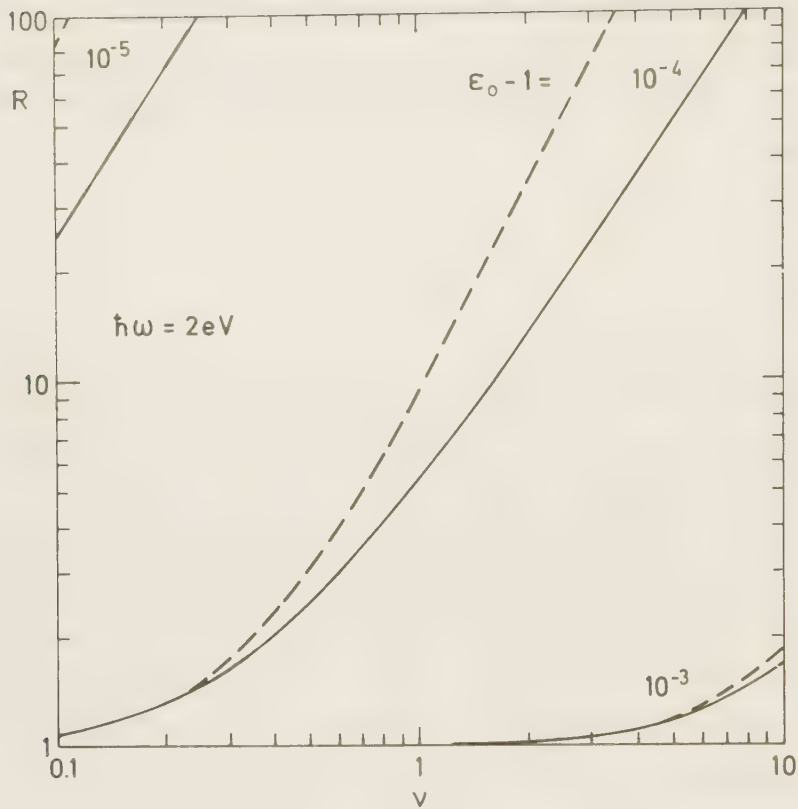


Abb. 4: Verstärkung R der totalen Zerfallsrate als Funktion von v für ein Feld der Frequenz $\hbar\omega = 2$ eV und für verschiedene kleine Q -Werte: $Q/mc^2 = \epsilon_0 - 1 = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$. Unterbrochene Kurve: exakte Theorie gemäß Gl. (3.45) bzw. (4.46). Durchgezogene Kurve: numerische Rechnung unter Vernachlässigung der Emission in (E, ϑ) -Punkten mit $n_0 > z$ (siehe Text).

terhin vernachlässigt, aber für die Konfigurationen mit $n_0 < z$ wurden alle Multiphotonsterme einschließlich den Beiträgen mit $n > z$ berücksichtigt.

Kürzlich ist es auch gelungen, eine analytische Entwicklung von Γ nach Potenzen von $\hbar\omega/mc^2$ abzuleiten [102, 103]. In erster Ordnung in $\hbar\omega/mc^2$ hat die Verstärkung R die Form

$$R = 1 + \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^2 \gamma(\epsilon_0) = 1 + \left(\frac{E_0}{E_c}\right)^2 \gamma(\epsilon_0), \quad (3.45)$$

$$\gamma(\epsilon_0) = \frac{\frac{4}{3} \epsilon_0 \ln(\epsilon_0 + \sqrt{\epsilon_0^2 - 1}) - \sqrt{\epsilon_0^2 - 1}}{\epsilon_0 \ln(\epsilon_0 + \sqrt{\epsilon_0^2 - 1}) + \frac{1}{15} \sqrt{\epsilon_0^2 - 1} (2\epsilon_0^4 - 9\epsilon_0^2 - 8)}.$$

Gl. (3.45) zeigt alle drei Möglichkeiten, merkliche Quanteneffekte zu erzielen, sehr anschaulich. Das Verhältnis der Feldstärke E_0 zum kritischen Wert E_c geht quadratisch in die Verstärkung R ein. Die Funktion η , die nur von den Kerneigenschaften abhängt, ist in Abb. 5 als die durchgezogene Kurve dargestellt. Für fiktive Q -Werte mit $Q \ll mc^2$ kann η so groß werden, daß bereits für $E_0 \ll E_c$ die Verstärkung R merklich von Eins abweicht. Wir wollen hier auf die recht komplizierte und aufwendige Ableitung von Gl. (3.45) verzichten. Im nächsten Kapitel werden wir mit einer völlig verschiedenen, wesentlich einfacheren Methode im Grenzfall nichtrelativistischer Elektronen-Kinematik die Quanteneffekte explizit berechnen. Das nichtrelativistische Ergebnis für die Verstärkung R ist in Kapitel IV in Gl. (4.46)

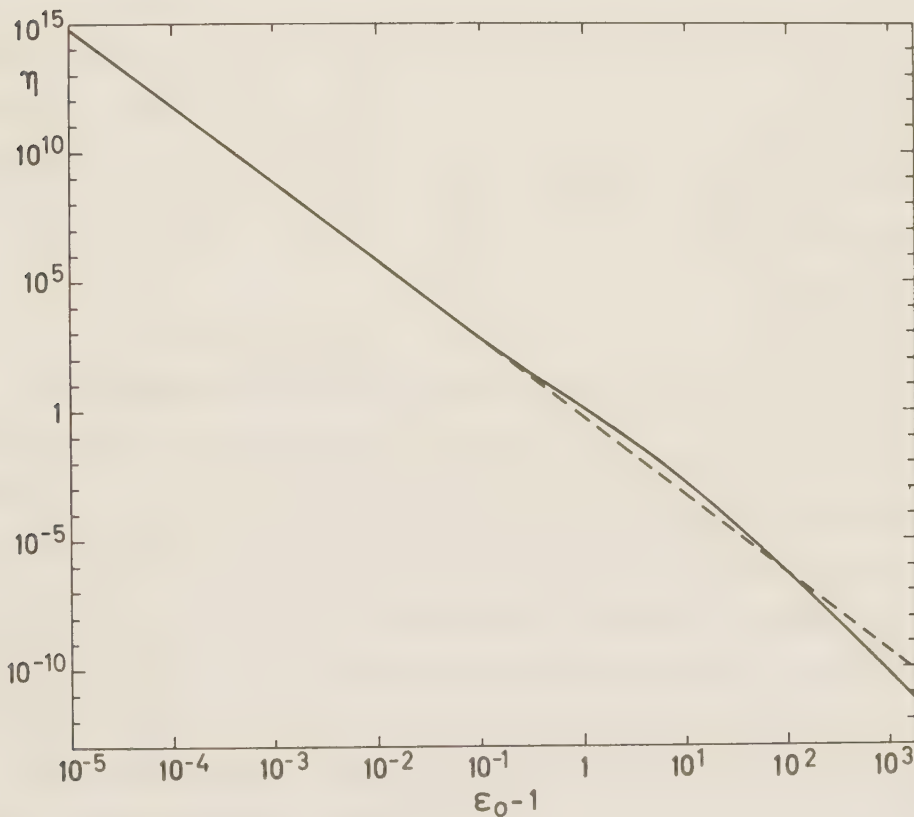


Abb. 5: Kernstruktur-Faktor η in Gl. (3.45) als Funktion von $Q/mc^2 = \epsilon_0 - 1$.
 Durchgezogene Kurve: Dirac-Theorie (relativistische Elektronen-Kinematik) [Gl. (3.45)]; Unterbrochene Kurve: Schrödinger-Theorie (nichtrelativistische Elektronen-Kinematik) [Kap. IV, Gl. (4.46)].

dargestellt. Diese Gleichung hat dieselbe analytische Form wie Gl. (3.45), nur daß die Funktion $n(\epsilon_0)$ durch ihre nichtrelativistische Version ersetzt werden muß. Die unterbrochene Gerade in Abb. 5 stellt das nichtrelativistische Ergebnis (4.46) für $n(\epsilon_0)$ dar. Die ausgezeichnete Übereinstimmung beider Kurven läßt den Schluß zu, daß die nichtrelativistische Theorie ausreichend ist für die Abschätzung der Quanteneffekte auf die Lebensdauer des Kerns. Die relativistischen Quanteneffekte sind klein im Vergleich zu den nichtrelativistischen.

Gl. (3.45) bzw. die für kleine Q-Werte völlig identische nichtrelativistische Theorie aus Kapitel IV liefern in Abb. 4 die gestrichelten Kurven. Die Diskrepanz zwischen dieser exakten Berechnung und der numerischen Abschätzung stammt von den (E, S) -Konfigurationen außerhalb des $(n_0 \leq z)$ -Gebietes. Mit wachsendem ν werden diese Konfigurationen immer wichtiger. Für das Einsetzen der Verstärkung spielen sie jedoch keine Rolle. Dort dominieren die Multiphotonbeiträge aus dem Bereich $z - z^{1/3} \lesssim n \lesssim z$. Abb. 4 zeigt schon bei relativ moderaten Intensitäten ν eine beträchtliche Verstärkung. Die gewählten Q-Werte sind jedoch wesentlich kleiner als alle in der Natur vorkommenden Q-Werte beta-zerfallender Kerne. Um beispielsweise bei Tritium eine Verstärkung von $R = 2$ zu erhalten, benötigt man entsprechend Gl. (3.45) schon einen Nd: Glas-Laser mit $\nu = 4 \cdot 10^3$. Dem entspricht eine Feldstärke von $E_0 = 1.2 \cdot 10^{14}$ V/cm.

Eine weitere Möglichkeit, durch das äußere Feld eine Verstärkung der totalen Zerfallsrate Γ und damit eine Verkürzung der Lebensdauer $\tau = 1/\Gamma$ des Kerns zu erhalten, besteht im Übergang zu kurzwelligen Feldern. So wird beispielsweise der Zerfall von Tritium in einem Feld mit Photonenenergie $\hbar\omega = 1$ keV ($\lambda = 12 \text{ \AA}$) und Intensität $\nu = 10$ ($I = 9 \cdot 10^{25} \text{ W/cm}^2$) um einen Faktor $R = 5.3$ beschleunigt. Im Grenzfall weiter anwachsender Feldfrequenz wird der Parameter z immer kleiner. Multiphotonprozesse spielen dann eine immer geringere Rolle und man kann sich auf Ein-Photonen-Prozesse beschränken. Dann muß das Elektron nicht mehr notwendigerweise durch die Volkov-Wellenfunktion beschrieben werden, sondern man kann ebene Wellen in zweiter Ordnung Störungstheorie, bilinear in der schwachen und in der elektromagnetischen Wechselwirkung, verwenden. Dieser theoretische Ansatz wird in Ref. 11 verfolgt.

Kapitel IV

Quanteneffekte in einem langwelligen Feld; Verbotener Betazerfall

In Kap. III wurde gezeigt, daß mit heute im Labor erzeugbaren Feldern die totale Übergangsrate für erlaubten Betazerfall praktisch nicht beeinflussbar ist. Wie in Ref. 19 behauptet wird, soll dies jedoch bei verbotenen Betazerfall anders sein. Bei verbotenen Betazerfall im äußeren Feld kommt ein grundlegend neuer physikalischer Prozeß hinzu, der bei erlaubtem Zerfall nicht auftreten kann: durch die Wechselwirkung mit dem äußeren Feld steht ein zusätzlicher Drehimpuls von maximal $n_m \hbar$ zur Verfügung, wobei n_m die Maximalzahl absorbiert oder emittierter Photonen bezeichnet. Auch kann durch die Wechselwirkung mit einer ungeraden Anzahl von Photonen eine Paritätsänderung bewirkt werden. (Wir setzen hier E1-Wechselwirkung voraus.) In Ref. 19 wird argumentiert, daß im Feld einer äußeren ebenen Welle die üblichen Auswahlregeln ihren Sinn verlieren und bei verbotenen Zerfällen auch erlaubte Zerfallskanäle auftreten. In Ref. 20 werden beeindruckende Zahlen für diesen Effekt angegeben. So werden für verschiedene Kerne - je nach Grad der Verbotenheit des natürlichen Zerfalls - Verstärkungen der totalen Zerfallsrate um Faktoren zwischen 4 und 10^{12} berechnet. Die dazu benötigten Felder sind heute experimentell zugänglich. Entsprechende Experimente sind auch bereits im Gange [21]. Es ist das Ziel dieses Kapitels, die in Ref. 19 abgeleitete Theorie aufgrund unabhängiger Rechnungen zu überprüfen und die in Ref. 20 angegebenen Zahlen mit eigenen Ergebnissen zu vergleichen.

Zur theoretischen Beschreibung des verbotenen Betazerfalls übernehmen wir das in Ref. 19 verwendete Modell. Das emittierte Elektron wird durch die Volkov-Wellenfunktion beschrieben und das zerfallende Nukleon durch die nichtrelativistische Wellenfunktion (2.26). Es wird also nur einer der beiden Effekte berücksichtigt, die die Ursache für das Auftreten verbotener Zerfälle sind, nämlich die Emission von Elektronen oder Neutrinos mit einem von Null verschiedenen Bahndrehimpuls. Dazu müssen die ortsabhängigen Anteile $\exp(i\vec{p}\vec{r}/\hbar)$ der Wellenfunktionen (= sog. Retardierungsterme) in den Rechnungen mit berücksichtigt werden. Der Rückstoß des Kerns wird jedoch weiterhin vernachlässigt.

Die Berechnung der totalen Zerfallsrate soll nach einer Methode durchgeführt werden, die verschieden ist von dem in Kapitel III und auch in Ref. 19 verwendeten konventionellen Verfahren. Konventionell berechnet man zuerst die partielle Übergangsrate pro Zeiteinheit w , dann nach teilweiser Integration über den Phasenraum die Spektren der emittierten Teilchen und erst zuletzt die totale Zerfallsrate. Dieses Verfahren erfordert, von Anfang an eine spezielle Form für das äußere Feld anzunehmen, um die Zeitintegration in der S-Matrix ausführen zu können. Dabei ist man gezwungen, eine Entwicklung nach Besselfunktionen einzuführen oder Näherungen wie die stationäre Phasenmethode zu verwenden. Dieses Verfahren ist sehr kompliziert und entsprechend fehlerträchtig, wie schon die Erfahrung mit Ref. 18 und 23 gezeigt hat. Da wir im folgenden insbesondere die Effekte berechnen wollen, die in Kap. III aufgrund der klassischen Näherung $\hbar \rightarrow 0$ vernachlässigt wurden, wollen wir diese konventionelle Prozedur vermeiden.

In diesem Kapitel sind wir nicht mehr an den Spektren der emittierten Teilchen interessiert. Wir haben schon in Kapitel III gesehen, daß bereits bei relativ moderaten Intensitäten, bestimmt durch den Parameter $\nu(1.1)$, große Feldeffekte in der Energie- und Winkelverteilung der emittierten Elektronen auftreten. Effekte, die nur durch ν bestimmt sind wie in Gl. (3.38), können jedoch im Rahmen der klassischen Elektrodynamik verstanden werden. Wir erwarten daher im Spektrum verbotener Zerfälle ähnlich dominierende Effekte rein klassischer Natur wie bei erlaubten Zerfällen. In diesem Kapitel werden wir uns ganz darauf konzentrieren, die Feldeinflüsse auf die totale Zerfallsrate und damit die Quanteneffekte zu bestimmen. Daß Änderungen der totalen Zerfallsrate nur auf Quanteneffekten beruhen, ist nach der Diskussion in Kapitel III plausibel und wird in Kapitel V allgemein bewiesen. Wir werden in den Rechnungen dieses Kapitels darauf abzielen, die totale Zerfallsrate direkt zu berechnen ohne den mühsamen Umweg über die Berechnung der differentiellen Zerfallsraten. Dazu quadrieren wir erst das S-Matrixelement, führen dann bereits die Integration $d^3p d^3q$ über den Phasenraum aus und betrachten die Orts- und Zeitintegration d^4x erst zuletzt. Dieses Verfahren hat sich schon früher bei der quantenelektrodynamischen Beschreibung von Streuprozessen in äußeren Feldern als vorteilhaft erwiesen [104]. Es veranschaulicht die Abhängigkeit vom äußeren Feld durchgehend durch die ganze Rechnung sehr deutlich und verlangt erst im letzten Schritt für die Zeitintegration, eine spezielle Form für das Feld anzunehmen.

In diesem Kapitel werden nicht nur die Feldeffekte auf die totale Übergangsrate bei verbotenen Zerfällen abgeleitet, sondern auch die Quantenkorrekturen zu der in Kapitel 3.6 im quasiklassischen Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ berechneten erlaubten Zerfallsrate. Außerdem lassen sich die Ergebnisse im Prinzip auch auf induzierte Zerfälle ($Q < 0$) anwenden.

Im Gegensatz zu den Rechnungen in Ref. 19 wollen wir in diesem Kapitel zwei wesentliche Vereinfachungen einführen. Zum einen soll das Elektron durch die nichtrelativistische Volkov-Wellenfunktion beschrieben werden, d. h. durch die Lösung der Schrödinger-Gleichung statt der Dirac-Gleichung. Bekanntlich ist in der nichtrelativistischen Quantenmechanik der Zerfall eines Teilchens prinzipiell nicht möglich, da die Masse erhalten bleibt. Man kann aber in der relativistischen Theorie zum Grenzfall nichtrelativistischer Kinematik übergehen. Damit müssen wir uns auf Felder in der Näherung großer Wellenlängen beschränken. Dies impliziert, daß nur elektrische Dipolübergänge zugelassen werden. Außerdem beschreiben wir die schwache Wechselwirkung als skalare Wechselwirkung, ganz im Sinne von Fermi's Originalarbeit zum Betazerfall [105]. Dieser Ansatz gilt a priori nur für den niederenergetischen Teil des Elektronenspektrums bzw. für die seltenen Zerfälle mit $Q \ll mc^2$. Bei realistischen Kernen mit $Q \gtrsim mc^2$ führt die relativistische Elektronenkinematik im Vakuum sehr wohl zu deutlichen Abweichungen von der nichtrelativistischen Theorie, sowohl in den Spektren als auch in der totalen Zerfallsrate. Wir werden jedoch in Abschnitt 4.4 für erlaubten Zerfall finden, daß sich die relative Änderung der totalen Übergangsrate vom Vakuumzerfall zum Zerfall im Feld ausgezeichnet im Rahmen der nichtrelativistischen Theorie beschreiben läßt. Die nichtrelativistischen Quanteneffekte dominieren offenbar über die relativistischen Quanteneffekte und liefern auch für Kerne mit $Q > mc^2$ sowie für beliebige Feldstärken eine ausgezeichnete Abschätzung der Feldeffekte auf die Lebensdauer. Wir werden dies auch für die verbotenen Zerfälle annehmen. Man mag einwenden, daß relativistische Effekte bei verbotenen Zerfällen eine entscheidendere Rolle spielen. Um jedoch unsere Ergebnisse mit Ref. 19 vergleichen zu können, ist die nichtrelativistische Theorie ausreichend, da auch in Ref. 19 der einzige reine relativistische Effekt beim verbotenen Zerfall, der Kernrückstoß, vernachlässigt wurde. Die Retardierungsterme, der zweiter Unterschied zwischen

erlaubtem und verbotenem Zerfall, treten in der nichtrelativistischen Theorie genauso auf wie in der relativistischen und werden im folgenden voll berücksichtigt. Da wir in diesem Kapitel nur an einer Abschätzung der Quanteneffekte interessiert sind, stellt die nichtrelativistische Theorie hierfür eine ausreichende Näherung dar. Die voll relativistische Theorie des verbotenen Betazerfalls im äußeren Feld ist recht kompliziert. Wir werden sie in Abschnitt 4.2 diskutieren und im nächsten Kapitel in Abschnitt 5.3 für den klassischen Grenzfall ausführlich darstellen.

Die zweite Vereinfachung gegenüber Ref. 19 liegt darin, daß wir die Verstärkung der totalen Zerfallsrate für das Beispiel einer zirkular polarisierten Welle berechnen wollen. Linear polarisierte Felder, die in Ref. 19 verwendet werden, können jedoch formal genauso behandelt werden. Die verschiedenen Polarisierungen sollten keine prinzipiellen Unterschiede für die Größe der Quanteneffekte ausmachen. Wir werden außerdem in Kapitel V die hier gewonnenen Ergebnisse auf beliebige ebene Wellen verallgemeinern, insbesondere also auch auf linear polarisierte Felder.

Die im folgenden dargestellten Rechnungen sind teilweise bereits in Ref. 65 und 106 beschrieben.

4.1 Nichtrelativistische Theorie des verbotenen Betazerfalls im Vakuum

Da die nichtrelativistische Theorie des verbotenen Betazerfalls beliebiger Ordnung in der Literatur nicht diskutiert wird, soll sie hier kurz abgeleitet werden. Dieser Abschnitt dient auch dazu, unsere Methode zur Berechnung der totalen Zerfallsrate zu illustrieren.

Für den Betazerfall im Vakuum beschreiben wir die Kernzustände durch die Eigenzustände φ_n^0 (2.13) des feldfreien Hamilton-Operators H_0 (2.7)

$$\psi_{i/f}(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E_{i/f} t} \varphi_{i/f}^0(\vec{r}) \quad (4.1)$$

und das Neutrino durch die ebene Welle

$$\psi_{\nu}(\vec{r}, t; \vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{\nu}}} e^{-\frac{i}{\hbar} (E_{\nu} t - \vec{q} \cdot \vec{r})}, \quad E_{\nu} = c |\vec{q}| \quad (4.2)$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall wird das Elektron repräsentiert durch die ebene Welle

$$\Psi_e(\vec{r}, t; \vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-\frac{i}{\hbar} (E t - \vec{p} \cdot \vec{r})}, \quad E = \frac{\vec{p}^2}{2m}. \quad (4.3)$$

Gl. (4.3) unterscheidet sich von Fermis Originalarbeit [105] dadurch, daß wir die nichtrelativistische Dispersionsbeziehung verwenden, während bei Fermi $E = c \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}$ eingesetzt wird. Das S-Matrixelement in erster Ordnung in der schwachen Wechselwirkung hat die Gestalt

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int d^3r \int dt \Psi_e^*(\vec{r}, t; \vec{p}) \Psi_f^*(\vec{r}, t; \vec{q}) \Psi_f^*(\vec{r}, t) (g V_\beta) \Psi_i(\vec{r}, t). \quad (4.4)$$

Der Operator der schwachen Wechselwirkung wird hier als skalar angenommen und durch $g V_\beta$ abgekürzt. Wir sind in diesem Kapitel nur an der totalen Zerfallsrate interessiert:

$$\Gamma = \int \frac{\Omega_f d^3q}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\Omega_i d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |S_{fi}|^2. \quad (4.5)$$

Durch Einsetzen von Gl. (4.4) und (4.1) und Vertauschung der Integrationen über $d^3r d^3r' dt dt'$ mit den Phasenraumintegrationen $d^3q d^3p$ erhalten wir

$$\Gamma = \int d^3r d^3r' \left\{ \Psi_f^{\circ*}(\vec{r}) V_\beta \Psi_i^{\circ}(\vec{r}) \right\} \left\{ \Psi_i^{\circ*}(\vec{r}') V_\beta^* \Psi_f^{\circ}(\vec{r}') \right\} * \gamma(\vec{r}, \vec{r}') \quad (4.6)$$

mit der "reduzierten" Rate

$$\gamma(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{g^2}{(2\pi)^6 \hbar^8} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' e^{\frac{i}{\hbar} Q(t' - t)} \left\{ \Omega_f \int d^3q \Psi_f^*(\vec{r}, t; \vec{q}) \Psi_f(\vec{r}', t'; \vec{q}) \right\} \left\{ \Omega_i \int d^3p \Psi_e^*(\vec{r}, t; \vec{p}) \Psi_e(\vec{r}', t'; \vec{p}) \right\}. \quad (4.7)$$

Die Abspaltung der reduzierten Rate γ aus der totalen Rate Γ ist sinnvoll, da wir an der Ortsintegration nicht interessiert sind, die die üblichen nuklearen Matrixelemente liefert. Wir haben in Gl. (4.7) den Q-Wert der Reaktion anstelle der nuklearen Energiedifferenz ΔE_N eingesetzt, so daß die Elektronenmasse schon berücksichtigt ist und die Energie E in der Elektronen-Wellenfunktion (4.3) tatsächlich nur die kinetische Energie bezeichnet.

Man entnimmt aus Gl. (4.7), daß die Methode, die d^3p -Integration mit der Phasenraum-Integration zu vertauschen, darauf hinausläuft, die Greensfunktionen [54] für Elektron und Neutrino zu berechnen. Dies soll im nächsten Schritt geschehen. Wir wenden uns zuerst der Elektron- Greensfunktion zu. Für die explizite Form (4.3) der Elektronen-Wellenfunktion hat sie die Gestalt

$$\begin{aligned} G_e(\vec{r}', t'; \vec{r}, t) &= \Omega \int d^3p \psi_e^*(\vec{r}, t; \vec{p}) \psi_e(\vec{r}', t'; \vec{p}) \\ &= \int d^3p e^{-\frac{i}{\hbar} \left[\frac{t' - t - i\varepsilon}{2m} \vec{p}^2 - (\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{p} \right]} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Die Größe $\varepsilon > 0$ garantiert, daß der Integrand für $|\vec{p}| \rightarrow \infty$ gegen Null geht. An dieser Stelle ist es nützlich, neue Variablen einzuführen

$$\tau \equiv t' - t, \quad \tau' \equiv t' + t, \quad \vec{x} \equiv \vec{r}' - \vec{r} \quad (4.9)$$

Die d^3p -Integration in Gl. (4.8) kann ausgeführt werden mit Hilfe des Gauß'schen Integrals

$$\int d^3x e^{i(ax^2 + \vec{y} \cdot \vec{x})} = \left(\frac{\pi i}{a} \right)^{3/2} e^{-i \frac{\vec{y}^2}{4a}}.$$

Dies liefert für die Elektron-Greensfunktion

$$G_e(x, \tau) = \left(\frac{2\pi\hbar m}{i(\tau - i\varepsilon)} \right)^{3/2} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m x^2}{2(\tau - i\varepsilon)}} \quad (4.10)$$

Die Greensfunktion hängt also nur von τ und $|\vec{x}|$ ab. Die Form (4.10) wird im nächsten Abschnitt eine wichtige Rolle spielen beim Vergleich der Greensfunktionen eines freien Elektrons und eines Elektrons im äußeren Feld. Für die Berechnung der Rate γ (4.7) ist sie jedoch wegen des auf-

tretenden Pols bei $\tau = 0$ nicht geeignet. Es ist vielmehr günstiger, in Gl. (4.8) $\vec{p}$ durch Polarkoordinaten auszudrücken und nur die Winkelintegration auszuführen. Dann erhält man G_e in der Form

$$G_e(x, \tau) = \frac{4\pi\hbar m}{x} \int_0^\infty dE \sin\left(\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mE} x\right) e^{-\frac{i}{\hbar} E \tau}. \quad (4.11)$$

Weiterhin wollen wir im Auge behalten, daß es unser Ziel ist, eine Form für die totale Zerfallsrate Γ (4.6) zu erhalten, in der man die verschiedenen Ordnungen von Verbotenheit sofort identifizieren kann. Diese verschiedenen Ordnungen sind durch die Potenzen der Ortskoordinaten $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ in γ bestimmt. Es ist daher sinnvoll, schon in Gl. (4.11) eine Entwicklung nach Potenzen von x durchzuführen, so daß die Abhängigkeit vom Grade der Verbotenheit in allen weiteren Rechnungen transparent ist:

$$G_e(x, \tau) = 2\pi (2m)^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2m)^n}{(2n+1)! \hbar^{2n}} x^{2n} \int_0^\infty dE E^{n+1/2} e^{-\frac{i}{\hbar} E \tau}. \quad (4.12)$$

Die Integration über E soll momentan noch nicht ausgeführt werden, da wir später in der reduzierten Rate γ die Energieerhaltung identifizieren wollen. Da die Elektronenenergie E beschränkt ist durch den Q -Wert des Zerfalls, ist der Entwicklungsparameter $\sqrt{2mEx}/\hbar$ in Gl. (4.12) klein, solange der Kernradius R klein ist gegen die Compton-Wellenlänge λ_c des Elektrons

$$8 \frac{Q}{mc^2} \left(\frac{R}{\lambda_c}\right)^2 \ll 1.$$

Normalerweise wird also nur die Ordnung zu G_e beitragen, für die erstmals das nukleare Matrixelement nicht verschwindet.

Die Berechnung der Neutrino-Greensfunktion

$$\begin{aligned} G_\nu(\vec{r}', t'; \vec{r}, t) &= \Omega_\nu \int d^3q \Psi_\nu^*(\vec{r}, t; \vec{q}) \Psi_\nu(\vec{r}', t'; \vec{q}) \\ &= \int d^3q e^{-\frac{i}{\hbar} [(t'-t-i\epsilon)q - (\vec{r}'-\vec{r})\vec{q}]} \end{aligned} \quad (4.13)$$

läßt sich völlig analog durchführen. Nach Einführung von Polarkoordinaten und Integration über die Winkel erhält man

$$G_J(x, \tau) = \frac{4\pi\hbar}{c^2 x} \int_0^\infty dE_J E_J \sin\left(\frac{x E_J}{\hbar c}\right) e^{-\frac{i}{\hbar} E_J \tau} \quad (4.14)$$

G_J hängt ebenfalls nur von x und τ ab. Auch die dE_J -Integration könnte noch ausgeführt werden mit dem Ergebnis

$$G_J(x, \tau) = \frac{2\pi i \hbar^3}{c^2 x} \left\{ \frac{1}{(\tau - \frac{x}{c} - i\varepsilon)^2} - \frac{1}{(\tau + \frac{x}{c} - i\varepsilon)^2} \right\} \quad (4.15)$$

Der Unterschied zwischen Gl. (4.10) und (4.15) rührt daher, daß wir das Elektron durch eine Lösung der Schrödinger-Gleichung beschrieben haben, das Neutrino jedoch durch eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung. Wegen den Singularitäten bei $x = 0$ und $x = c|\tau|$ in Gl. (4.15) ist es für die Berechnung der totalen Zerfallsrate γ wieder günstiger, bei der Form (4.14) zu bleiben und eine Entwicklung nach x entsprechend dem Grad der Verbotenheit durchzuführen:

$$G_J(x, \tau) = \frac{4\pi}{c^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(\hbar c)^{2m} (2m+1)!} x^{2m} \int_0^\infty dE_J E_J^{2(m+1)} e^{-\frac{i}{\hbar} E_J \tau} \quad (4.16)$$

Auch bei dieser Entwicklung ist der Parameter $x E_J / \hbar c$ klein, solange der Kernradius klein gegen die Wellenlänge des Neutrinos ist.

Ausgedrückt durch die Greensfunktionen und durch die Integrationsvariablen τ und τ' kann die Rate γ (4.7) geschrieben werden als

$$\gamma(\vec{r}', \vec{r}) = \frac{g^2}{(2\pi)^6 \hbar^8} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T d\tau' \int_{-T+|\tau'|}^{T-|\tau'|} d\tau e^{\frac{i}{\hbar} Q\tau} \quad (4.17)$$

$$G_e(x, \tau) G_J(x, \tau) \quad .$$

Die Funktion γ hängt also nur über $x = |\vec{r}' - \vec{r}|$ von den Ortskoordinaten ab. Beim Zerfall im Vakuum sind die Greensfunktionen unabhängig von τ' , so daß die τ' -Integration in Gl. (4.17) trivial ist. Wir können daher Gl. (4.17) auch schreiben als

$$\gamma_0(x) = \frac{g^2}{(2\pi)^6 \hbar^8} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{\frac{i}{\hbar} Q\tau} G_e(x, \tau) G_s(x, \tau) . \quad (4.18)$$

Der Index in γ_0 soll daran erinnern, daß wir hier den Zerfall im Vakuum betrachten. Zur Berechnung von $\gamma_0(x)$ setzen wir die Entwicklungen (4.12) und (4.16) ein und vertauschen die Integrationen so, daß wir zuerst über $d\tau$ integrieren, dann über dE und zuletzt über dE_ν . Die Zeitintegration liefert die Bedingung der Energieerhaltung in Form der üblichen Deltafunktion

$$\gamma_0(x) = \frac{g^2}{4\pi^3 \hbar^7 c^6} (2mc^2)^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)!(2m+1)!} \frac{(2mc^2)^n}{(\hbar c)^{2(n+m)}} x^{2(n+m)} \times \quad (4.19)$$

$$\int_0^{\infty} dE_\nu E_\nu^{2(n+m)} \int_0^{\infty} dE E^{n+1/2} \delta(Q - E_\nu - E) .$$

Aus der Deltafunktion entnehmen wir $E_\nu \leq Q$ als Obergrenze für die dE_ν -Integration. Dies impliziert insbesondere, daß nur für $Q > 0$ Zerfälle stattfinden können. Zur Berechnung der dE_ν -Integration verwenden wir [107]

$$\int_{x_0}^{x_1} dx (x-x_0)^m (x_1-x)^{n+1/2} = 2^{2(n+m)} \frac{m!(2n+1)!(n+m+1)!}{n!(2n+2m+3)!} (x_1-x_0)^{n+m+3/2} .$$

Die beiden Summen in Gl. (4.19) können neu geordnet werden durch Einführung der Summationsindices $k = n + m$ und $\ell = m$. Wenn wir weiterhin g durch die dimensionslose Kopplungskonstante G ersetzen, erhalten wir als Ergebnis für die freie Rate γ_0 :

$$\gamma_0(x) = \frac{g^6 \sqrt{2}}{\pi^3} \frac{mc^2}{\hbar} G^2 \left(\frac{Q}{mc^2} \right)^{7/2} \quad (4.20)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-2 \frac{Q}{mc^2} \right)^k \left(\frac{x}{\hbar c} \right)^{2k} \sum_{\ell=0}^k 2^{3\ell} (\ell+1) \frac{(k+\ell+3)!}{(k-\ell)!(2k+2\ell+7)!} \left(\frac{Q}{mc^2} \right)^\ell .$$

Zur Abkürzung wurde hier die Compton-Wellenlänge des Elektrons $\lambda_C = \hbar/mc = 386 \text{ fm}$ eingeführt. Der entscheidende Entwicklungsparameter $x/\lambda_C \approx 2R/\lambda_C$ ist so klein, daß die Entwicklung (4.20) bei der Ordnung k abgebrochen werden kann, für die das nukleare Matrixelement erstmals nicht verschwindet. Grob abgeschätzt sind die Beiträge der Ordnung $(k+1)$ um etwa 10^{-4} kleiner als die Beiträge der Ordnung k . Für die Diskussion in Abschnitt 4.3 wird es wichtig sein, daß wir in Gl. (4.20) die Rate γ_0 als Polynom in Q darstellen können, wobei zu einer festen Ordnung k der Verbotenheit nur endlich viele Potenzen von Q zwischen $Q^{7/2+k}$ und $Q^{7/2+2k}$ beitragen können.

Wir wollen das Ergebnis (4.20) noch kurz an ein paar Beispielen erläutern. Zuerst betrachten wir den erlaubten Zerfall. In diesem Fall ist $\langle f|V_\beta|i\rangle \neq 0$ und wir brauchen nur den Term $k = 0$ aus Gl. (4.20) in die totale Rate (4.6) einzusetzen. Da $\gamma_0^{(0)}$ unabhängig von x ist, erhalten wir sofort

$$\Gamma_0^{(0)} = \frac{8\sqrt{2}}{105\pi^3} \frac{mc^2}{\hbar} G^2 |\langle f|V_\beta|i\rangle|^2 \left(\frac{Q}{mc^2}\right)^{7/2}. \quad (4.21)$$

Gl. (4.21) beschreibt den nichtrelativistischen Grenzfall $Q \ll mc^2$ ($\epsilon_0 - 1 \ll 1$) der feldfreien Rate Γ_0 (3.44) für erlaubten Betazerfall. Bei einem Zerfall, der in erster Ordnung verboten ist, ist $\langle f|V_\beta|i\rangle = 0$, $\langle f|V_\beta \vec{r}|i\rangle \neq 0$. Dann liefert der Term $k = 1$ in γ_0 den Hauptbeitrag zu Γ_0 . Von dem ortsabhängigen Faktor in γ_0

$$x^2 = \vec{r}^2 + \vec{r}'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'$$

trägt nur der Kreuzterm zu Γ_0 bei, die beiden ersten Terme liefern Produkte von Matrixelementen der Form

$$\langle f|V_\beta|i\rangle \langle f|V_\beta \vec{r}^2|i\rangle^* = 0.$$

Damit erhält man

$$\Gamma_0^{(1)} = \frac{16\sqrt{2}}{945\pi^3} c \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 G^2 |\langle f|V_\beta \vec{r}|i\rangle|^2 \left(\frac{Q}{mc^2}\right)^{9/2} \left(1 + \frac{8}{11} \frac{Q}{mc^2}\right). \quad (4.22)$$

$\Gamma_0^{(1)}$ sowie die beiden nichtberücksichtigten Terme ($\sim \vec{r}^2$ und $\sim \vec{r}'^2$) tragen auch bei erlaubtem Zerfall als Korrektur zu $\Gamma_0^{(0)}$ bei, doch sind sie um mehrere Größenordnungen kleiner als der in Gl. (4.21) angegebene führende Term.

4.2 Verbotener Betazerfall im äußeren Feld

Der Zerfall im äußeren Feld kann in genauer Analogie zu der im letzten Abschnitt skizzierten Theorie des freien Zerfalls beschrieben werden. Wir müssen nur die Wellenfunktionen der geladenen Teilchen, d. h. des Korns im Anfangs- und Endzustand sowie des emittierten Elektrons, modifizieren. Dies soll in der R-Eichung geschehen. Wir werden später darauf eingehen, wie man in anderen Eichungen dasselbe Ergebnis erhält. Außerdem verwenden wir die Näherung großer Wellenlängen für das elektrische Feld ($\vec{A} = \vec{A}(t)$), wie es bei nichtrelativistischer Behandlung üblich ist.

Wie in Ref. 19 beschreiben wir in der R-Eichung die Kernwellenfunktionen durch Gl. (2.26). Für das Elektron wird die nichtrelativistische Volkov-Wellenfunktion $\psi_V(\vec{r}, t; \vec{p})$ (2.42) verwendet. Das S-Matrixelement in erster Ordnung in der schwachen Wechselwirkung und zu allen Ordnungen in der elektromagnetischen Wechselwirkung ist gegeben durch

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int d^3r \int dt e^{\frac{i}{\hbar} \vec{A}(t) \cdot \vec{r}} \psi_V^*(\vec{r}, t; \vec{p}) \psi_i^*(\vec{r}, t; \vec{q})$$

$$\psi_f^*(\vec{r}, t) (q V_\beta) \psi_i(\vec{r}, t) \quad .$$
(4.23)

Hierbei wurde $e_i - e_f = e$ (2.33) ausgenutzt. Die totale Rate Γ läßt sich wieder in der Form (4.6) darstellen, wobei in der Funktion γ jetzt allerdings die Phasen $\exp(i e \vec{A} \cdot \vec{r} / \hbar)$ aus den Kernwellenfunktionen (2.26) auftreten und die freie Elektronen-Greensfunktion G_e durch die Volkov-Greensfunktion G_V ersetzt ist

$$\gamma(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{g^2}{(2\pi)^6 \hbar^8} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' e^{\frac{i}{\hbar} Q(t-t')}$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar} [\vec{A}(t') \cdot \vec{r}' - \vec{A}(t) \cdot \vec{r}]} G_\gamma(\vec{r}', t'; \vec{r}, t) G_V(\vec{r}', t'; \vec{r}, t) .$$
(4.24)

Im folgenden soll die Volkov-Greensfunktion diskutiert werden. Ausgehend von Gl. (2.42) hat sie die Gestalt

$$G_V(\vec{r}', t'; \vec{r}, t) = \Omega \int d^3 p \Psi_V^*(\vec{r}, t; \vec{p}) \Psi_V(\vec{r}', t'; \vec{p}) \\ = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{e^2}{2m} \int_{\star}^{\star'} d\phi \vec{R}^2(\phi)} \int d^3 p e^{-\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{t' - t - i\varepsilon}{2m} \vec{p}^2 - \left[(\vec{r}' - \vec{r}) + \frac{e}{m} \int_{\star}^{\star'} d\phi \vec{R}(\phi) \right] \vec{p} \right\}}$$

Zur Berechnung von G_V kann wieder die Gauß'sche Integralformel verwendet werden. Nach einigen Umformungen kann G_V aufgespalten werden in Faktoren, die nur vom äußeren Feld abhängen, und in die Greensfunktion G_e (4.10) für das freie Elektron

$$G_V(\vec{r}', t'; \vec{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} e [\vec{R}(\star') \vec{r}' - \vec{R}(\star) \vec{r}]} e^{\frac{i}{\hbar} e \mathcal{R}(\vec{r}', t'; \vec{r}, t)} \\ e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{e^2}{2m} \mathcal{M}(\star', \star)} G_e(\vec{r}', t'; \vec{r}, t) \quad (4.25)$$

Die feldabhängigen Faktoren setzen sich zusammen aus einem effektiven Massenterm, der nur von der Zeit abhängt,

$$\mathcal{M}(\star', \star) = \int_{\star}^{\star'} d\phi \vec{R}^2(\phi) - \frac{1}{\star' - \star} \left[\int_{\star}^{\star'} d\phi \vec{R}(\phi) \right]^2 \quad (4.26)$$

und einem orts- und zeitabhängigen Term, den man mittels partieller Integration schreiben kann als

$$\mathcal{R}(\vec{r}', t'; \vec{r}, t) = \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{\star' - \star} \int_{\star}^{\star'} d\phi \vec{R}(\phi) - \vec{R}(\star') \vec{r}' + \vec{R}(\star) \vec{r} \\ = \int_{\star}^{\star'} d\phi \vec{R}(\phi) \vec{E}(\phi) \quad (4.27)$$

mit

$$\vec{R}(\phi) = \vec{r}' - \frac{\star' - \phi}{\star' - \star} (\vec{r}' - \vec{r}) .$$

Nach Einsetzen der Volkov-Greensfunktion (4.25) in die reduzierte Rate $\gamma(\vec{r}, \vec{r}')$ (4.24) für Zerfall im äußeren Feld erkennt man, daß sich die Phasenfaktoren $\exp(i\vec{A}\vec{r}/\hbar)$ gegenseitig wegheben. Man erhält [65]:

$$\gamma(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{g^2}{(2\pi)^6 \hbar^8} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' e^{\frac{i}{\hbar} Q(t'-t)} \quad (4.28)$$

$$e^{\frac{i}{\hbar} e \mathcal{R}(\vec{r}', t'; \vec{r}, t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{e^2}{2m} \mathcal{M}(t', t)} G_e(\vec{r}', t'; \vec{r}, t) G_j(\vec{r}', t'; \vec{r}, t) .$$

Die reduzierte Rate (4.28) ist eine eichunabhängige Größe. Wir erhalten denselben Ausdruck, wenn wir die Wellenfunktionen der geladenen Teilchen in der E-Eichung wählen. Dann sind die Kernzustände durch die Eigenzustände (2.14) des ungestörten Hamiltonoperators H_0 gegeben und die Volkov-Wellenfunktion durch Gl. (2.43). Damit treten die Phasen $\exp(i\vec{A}\vec{r}/\hbar)$ nicht mehr in den Kernwellenfunktionen auf. Andererseits enthält dafür die Elektronenwellenfunktion diesen Phasenfaktor, so daß sich die Volkov-Greensfunktion in der E-Eichung von der in der R-Eichung (4.25) gerade um den Faktor $\exp\{i e (\vec{A}' \vec{r}' - \vec{A} \vec{r}) / \hbar\}$ unterscheidet. Nach Einsetzen aller Wellenfunktionen erhält man in beiden Eichungen den Ausdruck (4.28) für γ . Es muß nur darauf geachtet werden, daß die Wellenfunktionen aller geladenen Teilchen konsistent in derselben Eichung gewählt werden. Die E-Eichung ist besonders anschaulich, da in dem S-Matrixelement (4.4) für die Kernzustände nur Eigenzustände von H_0 verwandt werden und man somit ganz offensichtlich in der Keldysh-Näherung arbeitet. Damit vermeidet man die ganze Diskussion über die korrekte Definition der nichtwechselwirkenden Zustände in verschiedenen Eichungen.

In Gl. (4.28) bietet sich der Vergleich mit der feldfreien reduzierten Rate γ_0 (4.17) an. Durch das äußere Feld sind nur die zwei Faktoren $\exp(i e \mathcal{R} / \hbar)$ und $\exp(i e^2 \mathcal{M} / 2m \hbar)$ neu hinzugekommen. Da $\mathcal{R}$ und $\mathcal{M}$ explizit von t und t' abhängen und nicht nur von der Kombination $\tau = t' - t$, kann nicht mehr wie in Gl. (4.18) eine Zeitintegration eliminiert werden. Die Zeitintegrationen können nur ausgeführt werden, wenn wir das Vektorpotential spezifizieren. Dies soll im nächsten Abschnitt geschehen. Im folgenden sollen die Feldeinflüsse auf die reduzierte Rate (4.28) aufgrund allgemeiner Überlegungen diskutiert werden.

In Kap. V werden wir zeigen, daß im klassischen Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ in der Elektron-Feld-Wechselwirkung nur Zeiten $t' = t$ zum Übergang beitragen. Unter dieser Gleichzeitigkeitsbedingung verschwinden die feldabhängigen Terme $\mathcal{M}$ (4.26) und $\mathcal{Q}$ (4.27), $\mathcal{M} = \mathcal{Q} = 0$. Im quasiklassischen Grenzfall ist also auch bei verbotenen Betazerfall die totale Rate feldunabhängig und Gl. (4.28) reduziert sich zu der feldfreien Rate γ_0 (4.17). Da in Gl. (4.26) und (4.27) das Vektorpotential nicht spezifiziert wurde, gilt diese Aussage für beliebige Felder, nicht nur für zirkuläre Polarisation wie in Kap. 3.6. Wir werden in Kap. 5.3 den exakten mathematischen Beweis nachliefern.

Die durch das äußere Feld induzierten Quanteneffekte in der totalen Zerfallsrate sind durch die Funktionen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{Q}$ bestimmt. Die Funktion $\mathcal{M}$ hängt nur von der Zeit ab und kann daher den Grad der Verbotenheit nicht ändern. Interessanter ist die Funktion $\mathcal{Q}$, die vom Ort und vom äußeren Feld abhängt und somit der einzige Kandidat ist, der im Prinzip die Auswahlregeln ändern könnte. Dieses Ergebnis ist auf den ersten Blick überraschend. In Anbetracht der nuklearen Wellenfunktion (2.26) würde man erwarten, daß Faktoren $\exp(i\vec{A}\vec{r}/\hbar)$ in die Berechnung der totalen Rate γ (4.28) eingehen und so erlaubte Zerfälle ermöglichen. Es ist jedoch der große Vorteil des hier verwendeten Verfahrens, Phasenraum- und Zeitintegration zu vertauschen, daß man sofort erkennt, wie sich die feld- (und eich-) abhängigen Beiträge $\exp(i\vec{A}\vec{r}/\hbar)$ aus den Kernwellenfunktionen gegen entsprechende Beiträge aus der Volkov-Greensfunktion aufheben. Bei der konventionellen Methode zur Berechnung der totalen Zerfallsrate ist dies nicht so leicht ersichtlich.

Wir wollen noch zeigen, daß das Auftreten von Faktoren der Form $\exp(i\vec{A}\vec{r}/\hbar)$ statt $\exp(i\vec{A}\vec{r}/\hbar)$ in Gl. (4.28) von entscheidender Bedeutung ist, da in einem langwelligen Feld $\mathcal{Q} \ll \vec{A}\vec{r}$ ist, womit die durch $\exp(i\vec{A}\vec{r}/\hbar)$ bedingte Verletzung der feldfreien Auswahlregeln viel geringer ist als bei $\exp(i\vec{A}\vec{r}/\hbar)$. Dazu entnehmen wir Gl. (4.28) mit (4.10) und (4.15), daß das äußere Feld nur die Phase des Integranden ändert, nicht aber seinen Betrag, der durch

$$\frac{\hbar^2}{c^2} (2\pi\hbar)^{5/2} \omega^{3/2} \frac{1}{x\tau^{3/2}} \left\{ \frac{1}{(\tau - \frac{x}{c})^2} - \frac{1}{(\tau + \frac{x}{c})^2} \right\}$$

gegeben ist. Der Integrand fällt also beim Zerfall im Feld auf derselben Zeitskala ab wie beim feldfreien Zerfall. Signifikante Beiträge kommen damit nur aus dem Bereich $|\tau| \lesssim \hbar/Q$. Diese Aussage kann durch eine detaillierte

Untersuchung der Pole und stationären Phasenpunkte untermauert werden. Wir verzichten hier darauf, da wir im nächsten Abschnitt automatisch $\tau \sim \hbar/Q$ als Ergebnis finden werden. In einem langwelligen Feld mit Frequenz $\hbar\omega \ll Q$ tragen also nur Zeitdifferenzen $\tau = t' - t$ mit $\omega\tau \ll 1$ zu dem Integral (4.28) bei. Es ist dann erlaubt, Gl. (4.27) zu entwickeln

$$\mathcal{R} \sim RE_0\tau.$$

Diese Größe ist von der Größenordnung $\hbar RE_0/Q$. Sie ist zu vergleichen mit $\vec{A}r \sim RE_0/\omega$. Für $\hbar\omega \ll Q$ ist also tatsächlich $\mathcal{R} \ll \vec{A}r$. Wir werden diesen Punkt in Abschnitt 4.5 nochmals ausführlich diskutieren. Es soll noch betont werden, daß die Berücksichtigung der Phase $\exp(i\vec{A}r/\hbar)$ in der Kernwellenfunktion notwendig ist, um die Feld- und Ortsabhängigkeit in der Größe $\mathcal{R}$ zusammenfassen zu können. Bei inkonsistenter Verwendung von Kernzuständen in der E-Eichung und der Volkov-Wellenfunktion in der R-Eichung würden sich in der Rate γ (4.28) die verschiedenen Faktoren $\exp(i\vec{A}r/\hbar)$ nicht gegenseitig aufheben.

Das in diesem Kapitel beschriebene Verfahren zur Berechnung der totalen Zerfallsrate kann analog auch bei relativistischer Behandlung der Elektronen verwendet werden. Die durch die Dirac-Volkov-Wellenfunktion (2.57) gegebene Greensfunktion [108] ist jedoch wesentlich komplizierter als die nichtrelativistische Version (4.25). In Ref. 65 wird die relativistische Greensfunktion ausführlich diskutiert. Es kann gezeigt werden, daß sich in der Volkov-Greensfunktion genauso wie im nichtrelativistischen Fall die Phasen $\exp\{i(\vec{A}'\vec{r}' - \vec{A}r)/\hbar\}$ abspalten lassen, so daß die Eichphasen $\exp(i\vec{A}r/\hbar)$ aus den Kernwellenfunktionen wegfallen und statt dessen wieder Faktoren der Form $\exp(i\mathcal{R}/\hbar)$ auftreten. Es wurde außerdem untersucht, ob in der relativistischen Greensfunktion neue Terme auftreten, die $\vec{A}r$ enthalten und somit die Verbotenheit des Übergangs aufheben könnten. Es treten jedoch nur Terme linear in $\vec{r}' - \vec{r}$ auf, die den Grad der Verbotenheit nur um eine Ordnung ändern können und in langwelligen Feldern ($\hbar\omega \ll mc^2$) vernachlässigbar sind. Dieses Ergebnis deutet darauf hin, daß die relativistischen Quanteneffekte klein sind. Die exakte Berechnung der reduzierten Rate (4.24) mit der relativistischen Volkov-Greensfunktion in Analogie zu der nichtrelativistischen Rechnung im folgenden Abschnitt 4.3 steht noch aus.

4.3 Verbotener Betazerfall in einem zirkular polarisierten Feld

Zur weiteren Behandlung der beiden Zeitintegrationen in Gl. (4.28) muß die analytische Form des äußeren Feldes spezifiziert werden. Wir wählen wieder das zirkular polarisierte Feld (2.58) in der Näherung großer Wellenlängen

$$\vec{E}(t) = E_0(\hat{e}_1 \sin \omega t + \sqrt{5} \hat{e}_2 \cos \omega t).$$

Das zugehörige Vektorpotential in der R-Eichung ist durch die Dipol-Näherung von Gl. (2.59) gegeben. Damit erhält man für den effektiven Massenterm $\mathcal{M}$ (4.26)

$$\mathcal{M}(\tau) = a^2 \tau \left\{ 1 - \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2} \tau}{\frac{\omega}{2} \tau} \right)^2 \right\}. \quad (4.29)$$

Die Größe $\mathcal{M}$ hängt nur noch von der Zeitdifferenz $\tau = t' - t$ ab. Wir werden im weiteren Verlauf dieses Abschnittes sehen, daß nur Zeiten $\omega \tau \ll 1$ zur totalen Zerfallsrate beitragen. Dann sind die beiden Einzelbeiträge zu $\mathcal{M}$ in Gl. (4.29) von der Größenordnung $a^2 \tau$, $\mathcal{M}$ selbst jedoch ist nur von der Ordnung $a^2 \tau (\omega \tau)^2 / 12 \ll a^2 \tau$. Die verschiedenen Feldbeiträge zu $\mathcal{M}$ heben sich also zum Großteil gegenseitig auf.

Die Funktion $\mathcal{R}$ hat in einem zirkular polarisierten Feld die explizite Gestalt

$$\mathcal{R}(\vec{r}', \tau'; \vec{r}, \tau) = a \left\{ f_1(\tau, \vec{r}, \vec{r}') \cos \frac{\omega}{2} \tau' + f_2(\tau, \vec{r}, \vec{r}') \sin \frac{\omega}{2} \tau' \right\} \quad (4.30)$$

mit

$$\begin{aligned} f_1(\tau, \vec{r}, \vec{r}') &= (x' - x) \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2} \tau}{\frac{\omega}{2} \tau} - \cos \frac{\omega}{2} \tau \right) + \sqrt{5} (y' + y) \sin \frac{\omega}{2} \tau, \\ f_2(\tau, \vec{r}, \vec{r}') &= -\sqrt{5} (y' - y) \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2} \tau}{\frac{\omega}{2} \tau} - \cos \frac{\omega}{2} \tau \right) + (x' + x) \sin \frac{\omega}{2} \tau. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Hierbei wurden wieder die Zeitvariablen τ und τ' eingeführt, und $\mathcal{R}$ wurde in Gl. (4.30) in einer Form geschrieben, die die Abhängigkeit von τ' verdeutlicht. Wir finden auch in Gl. (4.31) die gegenseitige Aufhebung großer Terme. Die Einzelbeiträge sind von der Ordnung R , f_1 und f_2 jedoch von $R \omega \tau \ll R$. Dazu war es notwendig, daß die Phasenfaktoren $\exp(i \vec{A} \cdot \vec{r} / \hbar)$ in den Kernwellenfunktionen (2.27) berücksichtigt wurden. Wären diese Faktoren weggelassen

worden, bekäme man

$$f_1(\tau, \vec{r}, \vec{r}') = (x' - x) \frac{\sin \frac{\omega}{2} \tau}{\frac{\omega}{2} \tau}, \quad f_2(\tau, \vec{r}, \vec{r}') = -\sigma(y - y') \frac{\sin \frac{\omega}{2} \tau}{\frac{\omega}{2} \tau}.$$

Da nur $\mathcal{R}$ von τ' abhängt, nicht aber $\mathcal{M}$, kann Gl. (4.28) geschrieben werden als

$$\gamma(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{q^2}{(2\pi)^6 \hbar^8} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{\frac{i}{\hbar} Q \tau} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{e^2}{2m} \mathcal{M}(\tau)} G_e(x, \tau) G_{\sigma}(x, \tau) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T d\tau' e^{\frac{i}{\hbar} e a (f_1 \omega \frac{\omega}{2} \tau' + f_2 \sin \frac{\omega}{2} \tau')} \quad (4.32)$$

Die τ' -Integration kann mit Hilfe der Entwicklungen (2.71) nach Besselfunktionen ausgeführt werden. Unter Ausnutzung des Additionstheorems für Besselfunktionen [87]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z_1) J_{-n}(z_2) = J_0(\sqrt{z_1^2 + z_2^2})$$

erhält man für das Integral die Besselfunktion nullter Ordnung

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T d\tau' e^{\frac{i}{\hbar} e a (f_1 \omega \frac{\omega}{2} \tau' + f_2 \sin \frac{\omega}{2} \tau')} = J_0(z(\tau, \vec{r}, \vec{r}'))$$

mit

$$\begin{aligned} z(\tau, \vec{r}, \vec{r}') &= \frac{ea}{\hbar} \sqrt{f_1^2(\tau, \vec{r}, \vec{r}') + f_2^2(\tau, \vec{r}, \vec{r}')} \\ &= \frac{ea}{\hbar} \left\{ (\vec{r}'_T - \vec{r}_T)^2 \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2} \tau}{\frac{\omega}{2} \tau} - \cos \frac{\omega}{2} \tau \right)^2 + (\vec{r}'_T + \vec{r}_T)^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \tau \right. \\ &\quad \left. - 4\sigma(x'y' - x'y) \sin \frac{\omega}{2} \tau \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2} \tau}{\frac{\omega}{2} \tau} - \cos \frac{\omega}{2} \tau \right) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Die Größen $\vec{r}_T$ bezeichnen zweikomponentige Vektoren $\vec{r}_T = (x, y, 0)$.

Zur Berechnung der Rate γ

$$\gamma(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{q^2}{(2\pi)^6 \hbar^8} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{e^2}{2m} \mathcal{M}(\tau)} \gamma_0(z(\tau, \vec{r}, \vec{r}')) e^{\frac{i}{\hbar} Q\tau} \quad (4.34)$$

$$G_e(x, \tau) G_s(x, \tau)$$

verbleibt noch die τ -Integration. Mit einem einfachen Trick können wir diese extrem komplizierte Integration vermeiden [106]. Wir nutzen dazu aus, daß jede analytische Funktion $f(x)$, die mit einer Exponentialfunktion $\exp(ax)$ multipliziert ist, auch als Operator geschrieben werden kann, der auf diese Exponentialfunktion wirkt

$$f(x) e^{ax} = f\left(\frac{\partial}{\partial a}\right) e^{ax}.$$

Man entnimmt Gl. (4.34), daß der Q -Wert nur in dem Faktor $\exp(iQ\tau/\hbar)$ auftritt. Anstatt die feldabhängigen Größen $\mathcal{M}$ und γ_0 als Funktionen von τ zu betrachten, können wir sie durch die Substitution $\tau \rightarrow -i\hbar \partial/\partial Q$ auch als Operatoren auffassen, die auf $\exp(iQ\tau/\hbar)$ wirken. Wir können dann diese Operatoren aus dem Zeitintegral (4.34) herausziehen und es bleibt nur noch die Rate γ_0 (4.18) für den feldfreien Zerfall übrig

$$\gamma(\vec{r}, \vec{r}') = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{e^2}{2m} \mathcal{M}(-i\hbar \frac{\partial}{\partial Q})} \gamma_0\left(z(-i\hbar \frac{\partial}{\partial Q}, \vec{r}, \vec{r}')\right) \gamma_0(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (4.35)$$

Es ist also möglich, die gesamten Feldeinflüsse in zwei Operatoren zusammenzufassen, die auf die feldfreie Rate wirken. Diese wurde in Gl. (4.20) berechnet. Der große Vorteil der Operatorschreibweise liegt darin, daß unerläßliche Näherungen bei der Zeitintegration in Gl. (4.34) (wie die Annahme, daß nur Zeiten $\omega\tau \ll 1$ zum Integral beitragen oder stationäre Phasennäherungen) vermieden werden. Gl. (4.35) ist exakt.

Die Lösung (4.35) für die reduzierte Rate γ ist nur nützlich, wenn wir leicht zu handhabende Darstellungen für die Operatoren finden. Diese Operatoren sind durch ihre Potenzreihenentwicklungen nach $\partial/\partial Q$ definiert:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{e^2}{2m} \mathcal{M}(-i\hbar \frac{\partial}{\partial Q})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n} n!} \left(\frac{E_0}{E_c}\right)^{2n} (mc^2 \frac{\partial}{\partial Q})^{3n} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{p+1}}{2^{2p}} \left(\hbar\omega \frac{\partial}{\partial Q}\right)^{2p} \right\}^n \quad (4.36)$$

und

$$\begin{aligned}
 & \int_0 \left(z \left(-i \hbar \frac{\partial}{\partial Q}, \vec{r}, \vec{r}' \right) \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \frac{1}{\chi_c^{2n}} \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^{2n} \left(m c^2 \frac{\partial}{\partial Q} \right)^{2n} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2p}} \left(\hbar \omega \frac{\partial}{\partial Q} \right)^{2p} \right. \\
 & \quad \left. \left[\left(\vec{r}' + \vec{r} \right)^2 a_p - \left(\vec{r}' - \vec{r} \right)^2 b_{p+2} \left(\hbar \omega \frac{\partial}{\partial Q} \right)^2 \right] \right\}^n + \text{Terme} \propto \left(\sigma(x'y' - x'y) \right)^l.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Die Koeffizienten a_p und b_p sind gegeben durch

$$a_p = \sum_{r=0}^p \frac{1}{(2r+1)! (2p-2r+1)!}, \quad b_p = \sum_{r=0}^p \frac{r(p-r)}{(2r+1)! (2p-2r+1)!}. \tag{4.38}$$

Das Verhältnis zwischen elektrischem Feld E_0 und kritischer Feldstärke E_c taucht in den beiden Entwicklungen (4.36) und (4.37) aufgrund der Beziehung (2.65) auf. Bei der Beschreibung der Quanteneffekte geht das äußere Feld also nicht durch den Parameter v (2.65) ein, sondern durch E_0/E_c . Dagegen zeigt eine zur Ableitung von Gl. (4.35) - (4.38) parallele Rechnung, daß bei Vernachlässigung der Eichphasen $\exp(i e \vec{A} \vec{r} / \hbar)$ in den Kernwellenfunktionen der Entwicklungsparameter durch v gegeben wäre:

$$\int_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \int^{2n} \left(\frac{\vec{r}' - \vec{r}}{\chi_c} \right)^{2n} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p}{2^{2p}} \left(\hbar \omega \frac{\partial}{\partial Q} \right)^{2p} \right\}^n. \tag{4.39}$$

Diese Entwicklung würde in den folgenden Rechnungen zu viel größeren Feldeffekten in der totalen Zerfallsrate führen als Gl. (4.37).

Terme in der reduzierten Rate γ , die proportional zu einer beliebigen Potenz von $\sigma(xy' - x'y)$ sind, führen zu verschwindenden Matrixelementen und tragen somit nicht zur totalen Zerfallsrate Γ bei. Entsprechend sind sie in der Entwicklung von J_0 bereits vernachlässigt worden. Wie zu erwarten war, sind bei einem kugelsymmetrischen Kern die Feldeffekte unabhängig vom Drehsinn der zirkularen Polarisation. Nur bei Verwendung der V-A Theorie zur Beschreibung des Betazerfalls erhält man aufgrund der Paritätsverletzung unterschiedliche Ergebnisse bei verschiedenem Drehsinn.

Zur Anwendung der Operatoren (4.36) und (4.37) auf die feldfreie Zerfallsrate γ_0 (4.20) ist es nützlich, zuerst die p-Summationen zu diskutieren. Entwicklungsgröße der p-Summationen ist der Operator $(\hbar\omega\partial/\partial Q)^2$. Wichtig hierbei ist, daß der Operator $\partial/\partial Q$ immer in Zusammenhang mit dem Faktor $\hbar\omega$ auftritt. Dies liegt daran, daß die τ -Abhängigkeit in die Größen $\mathcal{M}(\tau)$ (4.29) und $\mathcal{Q}(\vec{r}'_\tau, \vec{r}_\tau)$ (4.30) im wesentlichen durch die dimensionslose Kombination $(\omega\tau/2)$ eingeht. Die Anwendung des Operators $(\hbar\omega\partial/\partial Q)^2$ auf die feldfreie reduzierte Rate $\gamma_0^{(k)}$ (4.20) für einen beliebigen Grad k von Verbotenheit führt zu Ausdrücken der Form

$$\left(\hbar\omega\frac{\partial}{\partial Q}\right)^2 Q^s = s(s-1)\left(\frac{\hbar\omega}{Q}\right)^2 Q^s, \quad s = \frac{7}{2} + k, \dots, \frac{7}{2} + 2k.$$

Der Operator wird also im wesentlichen ersetzt durch den Faktor $(\hbar\omega/Q)^2$. Somit liefert die (p+1)-te Ordnung $(\hbar\omega\partial/\partial Q)^{2p+2}$ bei Anwendung auf die feldfreie Rate einen Ausdruck, der sich in der Größenordnung $(\hbar\omega/Q)^2$ von der p-ten Ordnung $(\hbar\omega\partial/\partial Q)^{2p}$ unterscheidet. Für ein langwelliges äußeres Feld mit

$$\left(\frac{\hbar\omega}{Q}\right)^2 \ll 1 \quad (4.40)$$

kann die p-Summation somit für praktische Rechnungen nach den ersten Termen abgebrochen werden. Dies ist umgekehrt auch die Rechtfertigung dafür, daß wir früher bei der Diskussion der Zeitintegration in Gl. (4.28) angenommen haben, daß nur Zeiten $\omega\tau \ll 1$ beitragen. Die Operatorschreibweise zeigt, daß $\omega\tau$ durch $\hbar\omega/Q \ll 1$ ersetzt werden kann.

Unter der weiteren Voraussetzung, daß auch die Entwicklungskoeffizienten für die n-Summationen in $\exp(-ie^2\pi/2m\hbar)$ (4.36)

$$\left(\frac{E_0}{E_c}\right)^2 \left(\frac{\omega c^2}{Q}\right)^3 \ll 1 \quad (4.41)$$

und in J_0 (4.37)

$$\left(\frac{R}{\lambda_c} \frac{E_0}{E_c} \frac{\omega c^2}{Q}\right)^2 \ll 1 \quad (4.42)$$

klein gegen Eins sind, können auch diese Summen nach den führenden Termen abgebrochen werden. Für Gl. (4.41) und (4.42) wurde wieder $\partial/\partial Q$ durch $1/Q$ ersetzt. Die Bedingungen (4.40) - (4.42) wurden in Kap. III ausführlich diskutiert. Unter Laborbedingungen gilt immer $\hbar\omega \ll Q$ und

$E_0 \ll E_c$. Außerdem gilt für alle Kernradien $R \ll \lambda_c$.

In dem Bereich, in dem die Bedingungen (4.40) - (4.42) erfüllt sind, können wir die Operatoren, die in Gl. (4.35) auf die feldfreie Rate wirken, schreiben als

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{e^2}{2m} M (-i\hbar \frac{\partial}{\partial Q})}$$

$$= 1 + \frac{1}{24} \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^2 (mc^2 \frac{\partial}{\partial Q})^3 \left\{ 1 + \frac{1}{30} (\hbar\omega \frac{\partial}{\partial Q})^2 + \frac{1}{1680} (\hbar\omega \frac{\partial}{\partial Q})^4 + \dots \right\} \quad (4.43)$$

$$+ \frac{1}{1152} \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^4 (mc^2 \frac{\partial}{\partial Q})^6 \left\{ 1 + \frac{1}{15} (\hbar\omega \frac{\partial}{\partial Q})^2 + \dots \right\} + O \left[\left(\frac{E_0}{E_c} \right)^6 (mc^2 \frac{\partial}{\partial Q})^9 \right]$$

und

$$J_0 \left(z(-i\hbar \frac{\partial}{\partial Q}, \vec{r}, \vec{r}') \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{16} \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^2 (mc^2 \frac{\partial}{\partial Q})^2 \left\{ \left[(\vec{r}'_T + \vec{r}_T)^2 - \frac{1}{36} (\vec{r}'_T - \vec{r}_T)^2 (\hbar\omega \frac{\partial}{\partial Q})^2 \right] \right. \quad (4.44)$$

$$\left. + \frac{1}{12} (\hbar\omega \frac{\partial}{\partial Q})^2 \left[(\vec{r}'_T + \vec{r}_T)^2 - \frac{1}{60} (\vec{r}'_T - \vec{r}_T)^2 (\hbar\omega \frac{\partial}{\partial Q})^2 \right] + \dots \right\}$$

$$+ \frac{1}{1024} \frac{1}{\hbar^4 c^4} \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^4 (mc^2 \frac{\partial}{\partial Q})^4 \left\{ (\vec{r}'_T + \vec{r}_T)^4 + \dots \right\} + O \left[\left(\frac{R}{\lambda_c} \frac{E_0}{E_c} mc^2 \frac{\partial}{\partial Q} \right)^6 \right].$$

Die ersten Terme der Entwicklungen (4.43) und (4.44) sind in Gl. (4.35) einzusetzen. Nur für den Operator J_0 (4.44) kann man erwarten, die Verbotenheit eines Übergangs zu ändern. Bei einem Zerfall, der ohne äußeres Feld zu k-ter Ordnung verboten ist, erhält man aufgrund der Faktoren $(\vec{r}'_T + \vec{r}_T)^{2n}$ und $(\vec{r}'_T - \vec{r}_T)^{2n}$ in Gl. (4.44) durch die Anwendung von J_0 auf die reduzierten Raten $\gamma_0^{(0)} \dots \gamma_0^{(k-1)}$ bereits nichtverschwindende Beiträge zu den Ordnungen $0 \dots k-1$. Im nächsten Abschnitt sollen die Auswirkungen der Operatoren (4.43) und (4.44) auf die feldfreie reduzierte Rate γ_0 an einigen Beispielen detailliert vorgeführt werden.

4.4 Quantenkorrekturen zu erlaubtem und in erster Ordnung verbotenen Zerfall

Wir wollen zuerst die Feldeffekte auf die totale Zerfallsrate des erlaubten Betazerfalls untersuchen, da dies einen Vergleich unserer Theorie mit völlig unabhängigen, methodisch verschiedenen Rechnungen in Ref. 102 und 103 erlaubt. Bei der theoretischen Beschreibung des erlaubten Zerfalls führt man, wie in Kap. 3.1 beschrieben, für alle beteiligten Wellenfunktionen und Felder die Näherung großer Wellenlängen ein, so daß die Rate γ unabhängig von $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ wird. Dies führt in Gl. (4.35) zu den Vereinfachungen

$$J_0\left(z(-i\hbar\frac{\partial}{\partial Q}, \vec{r}, \vec{r}')\right) = 1, \quad \gamma_0(\vec{r}, \vec{r}') = \gamma_0^{(k=0)}.$$

Durch Einsetzen der Operatorentwicklung (4.43) und von $\gamma_0^{(0)}$ (4.20) in Gl. (4.35) und nach Berücksichtigung von Gl. (4.6) erhält man für das Verhältnis zwischen erlaubter Zerfallsrate $\Gamma^{(0)}$ im äußeren Feld und erlaubter Vakuumszerfallrate $\Gamma_0^{(0)}$ (4.21)

$$R = \frac{\Gamma_0^{(0)} + \Gamma_1^{(0)} + \Gamma_2^{(0)} + \dots}{\Gamma_0^{(0)}} = 1 + \frac{35}{64} \left(\frac{E_0}{E_c}\right)^2 \left(\frac{\hbar c}{Q}\right)^3 \left[1 - \frac{1}{120} \left(\frac{\hbar \omega}{Q}\right)^2 - \frac{1}{1792} \left(\frac{\hbar \omega}{Q}\right)^4 - \dots\right] \\ + \frac{35}{8192} \left(\frac{E_0}{E_c}\right)^4 \left(\frac{\hbar c}{Q}\right)^6 \left[1 + \frac{7}{12} \left(\frac{\hbar \omega}{Q}\right)^2 + \dots\right] + O\left[\left(\frac{E_0}{E_c}\right)^6 \left(\frac{\hbar c}{Q}\right)^9\right]. \quad (4.45)$$

$\Gamma_\ell^{(k)}$ bezeichnet den Beitrag der Ordnung $(E_0/E_c)^{2\ell}$ nach Anwendung von $\exp(-ie^2\pi/2m\hbar)$ und J_0 auf die feldfreie reduzierte Rate $\gamma_0^{(k)}$ für einen in k-ter Ordnung verbotenen Übergang. Gl. (4.45) stimmt mit Gl. (16) in Ref. 102 und Gl. (118) in Ref. 103 soweit überein, wie dort die Entwicklung ausgeführt wurde. Es soll betont werden, daß Ref. 102 und 103 nur den erlaubten Zerfall behandeln und die totale Zerfallsrate nach der konventionellen Methode wie in Kap. III aus einer Entwicklung der partiellen Zerfallsrate w nach Besselfunktionen berechnen. Dazu werden in der asymptotischen Entwicklung der Besselfunktionen neben dem führenden, klassischen Term (A9) die nächsthöheren Ordnungen berücksichtigt [103] bzw. die endliche Summe über Besselfunktionen mit Hilfe von sog. Meijer-G-Funktionen approximiert [102].

Abb. 6 zeigt die Verstärkung R (4.45) als Funktion des äußeren Feldes für drei verschiedene, sehr kleine Q -Werte. Der gezeigte Feldbereich $E_0/E_C = 2.4 \cdot 10^{-8} - 2.4 \cdot 10^{-4}$ ist heute mit Hochleistungslasern bereits experimentell zugänglich. Man entnimmt Abb. 6, daß man mit diesen relativ "schwachen" Feldern große Verstärkungen erzielen könnte, falls es Beta-zerfälle mit so kleinen Q -Werten gäbe. Der experimentelle Nachweis der Verstärkung ist vielleicht möglich bei Kernen, die in mehrere Niveaus eines Nachbarkerns zerfallen können, wobei der Zerfall in das oberste energetisch erlaubte Niveau eventuell einen sehr kleinen Q -Wert besitzt. Dann kann durch das äußere Feld dieser Zerfallskanal, der normalerweise extrem schwach ist, verstärkt werden, während alle anderen Zerfallskanäle praktisch unbeeinflusst bleiben. Durch das äußere Feld könnte man also das Verzweigungsverhältnis zwischen den einzelnen Zerfallskanälen modifizieren, die totale Zerfallsrate wird sich jedoch kaum wesentlich ändern lassen.

Wir wollen die Größenordnung der Quanteneffekte noch an zwei realistischen Beispielen illustrieren. Wir wählen wie in Kap. III die beiden Kerne ^3H und ^{18}F . Als äußeres Feld soll ein Nd:Glas-Laser der Intensität $I = 10^{18} \text{ W/cm}^2$ dienen, entsprechend einem Feldparameter $v = 0.9$. Die Bedingungen (4.40) - (4.42) sind für diese Beispiele gut erfüllt. Damit erhalten wir aus Gl. (4.45) die "Verstärkung" der totalen Zerfallsrate aufgrund des äußeren Feldes zu

$$R = 1 + 5 \cdot 10^{-8} \quad \text{für } ^3\text{H}$$

und

$$R = 1 + 1.3 \cdot 10^{-12} \quad \text{für } ^{18}\text{F} .$$

Diese Feldeffekte sind unmeßbar klein. Insbesondere sind sie auch klein gegen die Korrekturen in der schwachen Wechselwirkung, d. h. gegen (verbotene) Beiträge höherer Ordnung k in Gl. (4.20) zum erlaubten Zerfall. Beiträge eines in $(k+1)$ -ter Ordnung verbotenen Übergangs sind typischerweise um $10^{-2} - 10^{-4}$ kleiner als die Beiträge k -ter Ordnung und damit noch um viele Größenordnungen stärker als die Feldeffekte.

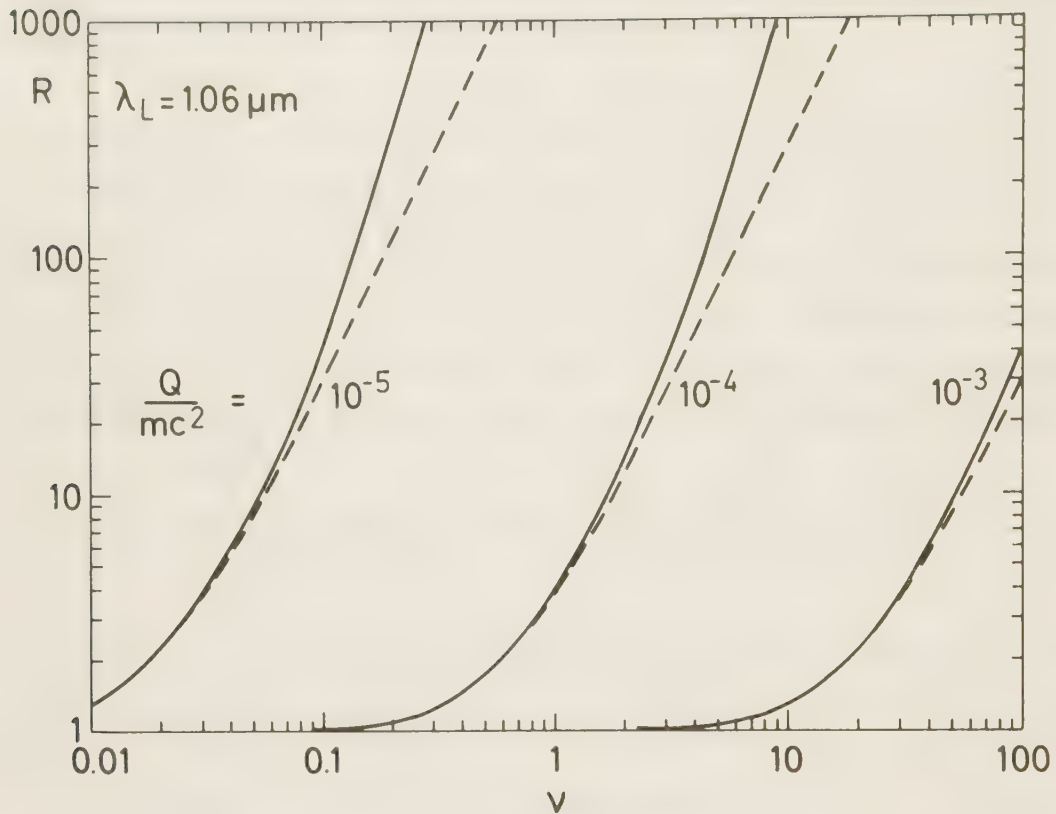


Abb. 6: Verstärkung R der totalen Rate $\Gamma^{(0)}$ für erlaubten Zerfall im äußeren Feld relativ zur feldfreien Rate $\Gamma_0^{(0)}$. Durchgezogene Kurve: Gl. (4.45) mit erster und zweiter Ordnung in $(E_0/E_C)^2$; unterbrochene Kurve: nur erste Ordnung in (E_0/E_C) . Die Verstärkung ist als Funktion des äußeren Feldes aufgetragen für drei fiktive Kerne mit $Q = 5.11 \text{ eV}$, 51.1 eV und 511 eV . Das äußere Feld wird hier nicht durch das Verhältnis E_0/E_C charakterisiert wie in Gl. (4.45), sondern es wird ein Nd:Glas-Laser mit $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ vorausgesetzt und der Wechselwirkungsparameter ν (1.1) zur Beschreibung des Feldes verwandt. Dem gezeigten Parameterbereich $\nu = 0.01 - 100$ entsprechen die Feldstärken $E_0 = 3.1 \cdot 10^8 - 3.1 \cdot 10^{12} \text{ V/cm}$ und die Intensitäten $I = 1.3 \cdot 10^{14} - 1.3 \cdot 10^{22} \text{ W/cm}^2$.

Ein sehr wichtiges Ergebnis dieses Kapitels ist, daß wir zur Ableitung der Feldeffekte auf die totale Zerfallsrate Störungsrechnung niedriger Ordnung in dem äußeren Feld anwenden können. Gl. (4.45) stellt eine Störungsreihe in E_0/E_C dar, und die Quantenkorrekturen werden normalerweise durch die erste Ordnung $\propto E_0^2$ gut beschrieben. Dies ist ein vielleicht überraschendes Ergebnis. Wir haben in Kap. II und III gesehen, daß ein

Elektron bei $Q/mc^2 \sim 1$ in einem Feld mit $\nu \sim 1$ etwa 10^6 Photonen absorbieren kann. Bei Multiphotonprozessen solch extrem hoher Ordnung sollte Störungstheorie nicht mehr in Frage kommen. Dies ist auch für die partiellen Größen wie die Energie- oder Winkelverteilung der emittierten Elektronen richtig. In Kap. III wurde gezeigt, daß man in diesen Spektren bereits für $\nu \sim 1$ große Abweichungen von der feldfreien Verteilung erhält, die sich sicher nicht mit Störungstheorie in einer vernünftigen Ordnung beschreiben lassen. Dort wurde aber auch gezeigt, daß diese Effekte nur von dem Parameter ν abhängen und rein klassischer Natur sind. Anders ist die Situation bei integrierten Größen wie der totalen Zerfallsrate. Wie im folgenden Kapitel V allgemein bewiesen wird, gibt es keine klassischen Effekte auf integrierte Größen, Feldeinflüsse beruhen nur auf Quanteneffekten. Da die Störungsreihe (4.45) sehr schnell konvergiert, spielen bei der Änderung der Lebensdauer von Kernen offensichtlich nur Ein-Photon-Prozesse effektiv eine Rolle.

Voraussetzung dafür, daß wir die Feldeffekte auf die totale Zerfallsrate durch Störungsrechnung niedriger Ordnung gewinnen können, sind die Bedingungen (4.40) - (4.42). Ähnliche Bedingungen haben wir am Ende von Abschnitt 3.2 für die Gültigkeit des klassischen Grenzfalles gefunden. Die Störungsreihe (4.45) ist insbesondere nur anwendbar bei Zerfällen, die auch ohne äußeres Feld stattfinden ($Q > 0$) und für deren Q -Wert $Q > \hbar\omega$ gilt. Wie mit wachsender Intensität Multiphotonprozesse einsetzen, ist aus Abb. 6 durch den Unterschied zwischen durchgezogenen und unterbrochenen Kurven ersichtlich. Für Multiphotonprozesse der Ordnung p steigt die Verstärkung R mit E_0^{2p} an.

Für den Energieverlust eines Elektrons in einem Magnetfeld aufgrund von Synchrotronstrahlung [82,98] sowie für diverse Quantenprozesse von Elementarteilchen in gekreuzten Feldern [24,25,30,31,33] lassen sich die Quantenkorrekturen ebenfalls in Störungsreihen entwickeln, die formal sehr ähnlich zu Gl. (4.45) sind.

Der erlaubte Betazerfall ermöglicht auch eine Untersuchung der relativistischen Quanteneffekte. In Ref. 102 wurden die Quantenkorrekturen in der voll relativistischen Theorie berechnet. Das Ergebnis wurde in Gl. (3.45) zitiert. Es ist zu vergleichen mit dem Term erster Ordnung in der nichtrelativistischen Theorie (4.45)

$$R = 1 + \left(\frac{E_0}{E_c}\right)^2 \eta_{NR}(Q), \quad \eta_{NR}(Q) = \frac{35}{64} \left(\frac{mc^2}{Q}\right)^3. \quad (4.46)$$

Die Quantenkorrekturen können in Gl. (3.45) wie in Gl. (4.46) in einen Feldfaktor und einen Kernstrukturfaktor aufgespalten werden. Der Feldfaktor $(E_0/E_c)^2$ ist in beiden Fällen gleich. Die Feldabhängigkeit wird in der nichtrelativistischen Theorie also auch für $v \gg 1$ korrekt beschrieben. Der relativistische Kernstrukturfaktor $\eta(\epsilon_0)$ (3.45) wird in Abb. 5 mit dem nichtrelativistischen Faktor $\eta_{NR}(Q)$ (4.46) über einen weiten Bereich von Q -Werten verglichen. Beide Faktoren sind nicht nur für $Q/mc^2 < 0.1$ praktisch identisch, sondern überraschenderweise ist auch für $Q/mc^2 \gg 1$ die Übereinstimmung ausgezeichnet. Bis $Q/mc^2 \lesssim 100$ unterscheiden sich beide Kurven in Abb. 5 nie um mehr als einen Faktor 4. Dieser Bereich deckt alle Betazerfälle der bekannten Nuklide ab. Mit Gl. (3.45) wie mit Gl. (4.46) erhält man dieselben unterbrochenen Kurven in Abb. 4 und 6. Die hervorragende Übereinstimmung zwischen Gl. (3.45) und (4.46) für alle realistischen Kerne dient uns als Rechtfertigung dazu, in diesem Kapitel die einfacher zu handhabende nichtrelativistische Theorie zu verwenden. Obwohl die totale Zerfallsrate Γ sehr wohl durch relativistische Kinematik stark modifiziert werden kann, sind die Korrekturen aufgrund eines äußeren Feldes offenbar fast ausschließlich nichtrelativistischer Natur. Dies ist ein weiteres wichtiges Ergebnis unserer Untersuchungen.

Als nächstes Beispiel soll ein in erster Ordnung verbotener Zerfall untersucht werden, d. h. $\langle f | V_\beta | i \rangle = 0$, $\langle f | V_\beta \vec{r} | i \rangle \neq 0$. Die Vakuumzerfallsrate $\Gamma_0^{(1)}$ ist durch Gl. (4.22) gegeben. Die Anwendung des Operators (4.43) auf $\gamma_0^{(1)}$ liefert als ersten Beitrag zur totalen Rate $\Gamma^{(1)}$ (4.6)

$$\Gamma_0^{(1)} + \Gamma_1^{(1)} + \dots = \Gamma_0^{(1)} \left\{ 1 + \frac{105}{64} \left(\frac{E_0}{E_c}\right)^2 \left(\frac{mc^2}{Q}\right)^3 \frac{1 + \frac{8}{5} \frac{Q}{mc^2}}{1 + \frac{8}{11} \frac{Q}{mc^2}} + \dots \right\}. \quad (4.47)$$

$\Gamma_0^{(1)}$ beschreibt die feldfreie Rate für einen in erster Ordnung verbotenen Zerfall und $\Gamma_1^{(1)}$ die Korrektur in erster Ordnung in $(E_0/E_c)^2$ zu $\Gamma_0^{(1)}$ aufgrund von $\exp(-ie^2 \pi / 2 m \hbar)$. Im Gegensatz zum erlaubten Zerfall spielt jetzt auch der Operator J_0 (4.44) eine Rolle. Seine Anwendung auf die reduzierte Rate $\gamma_0^{(1)}$ für verbotenen Zerfall liefert nur Korrekturterme, in

denen Matrixelemente $\langle f | V_{\beta} \vec{r}^2 | i \rangle$ von in zweiter und höherer Ordnung verbotenen Übergängen auftreten. Wir wollen solche Effekte vernachlässigen. Andererseits führt die Anwendung von J_0 auf die erlaubte reduzierte Rate $\gamma_0^{(0)}$ (Term $k = 0$ in Gl. (4.20)) in der totalen Rate Γ (4.6) zu Matrixelementen $\langle f | V_{\beta} \vec{r}_T | i \rangle$, die von Null verschieden sind:

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(0)} + \dots &= \frac{\sqrt{2}}{12\pi^3} c \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 G^2 \left| \langle f | V_{\beta} \vec{r}_T | i \rangle \right|^2 \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^2 \left(\frac{Q}{mc^2} \right)^{3/2} + \dots \\ &= \frac{105}{32} \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^2 \left(\frac{mc^2}{Q} \right)^3 \frac{1}{1 + \frac{8}{11} \frac{Q}{mc^2}} \Gamma_0^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (4.48)$$

Für die letzte Zeile wurde angenommen, daß

$$\left| \langle f | V_{\beta} \vec{r}_T | i \rangle \right|^2 = \frac{2}{3} \left| \langle f | V_{\beta} \vec{r} | i \rangle \right|^2$$

ist. Die gesamte Verstärkung durch das äußere Feld ergibt sich dann zu

$$R = \frac{\Gamma^{(1)}}{\Gamma_0^{(1)}} = \frac{\Gamma_1^{(0)} + \Gamma_0^{(1)} + \Gamma_1^{(1)} + \dots}{\Gamma_0^{(1)}} = 1 + \frac{315}{64} \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^2 \left(\frac{mc^2}{Q} \right)^3 \frac{1 + \frac{8}{15} \frac{Q}{mc^2}}{1 + \frac{8}{11} \frac{Q}{mc^2}} \quad (4.49)$$

Wir wollen auch dieses Ergebnis an einem Beispiel illustrieren. Wir wählen dazu den Kern ^{90}Sr , dessen Zerfall in erster Ordnung verboten ist. Die Halbwertszeit beträgt 28.6 y, der Q-Wert 546 keV. Mit einem Nd-Laser der Intensität $I = 10^{18} \text{ W/cm}^2$ erzielt man eine Verstärkung von

$$R = 1 + 1.6 \cdot 10^{-11}.$$

Vergleichsweise können wir auch ein Radiofeld mit Frequenz 1 MHz und Feldstärke $E_0 = 10^4 \text{ V/cm}$ betrachten. Dem entspricht eine Intensität von $I = 1.3 \cdot 10^5 \text{ W/cm}^2$ und ein Wechselwirkungsparameter von $\nu = 96$. Die damit erreichbare Verstärkung ist noch um Größenordnungen kleiner als bei einem Laser:

$$R = 1 + 2 \cdot 10^{-24}.$$

Aufgrund des Operators J_0 tragen also bei einem in ℓ -ter Ordnung verbotenen Zerfall auch die Ordnungen $k = 0, \dots, \ell - 1$ in der reduzierten Rate γ_0 (4.20) zur totalen Zerfallsrate Γ bei. Dies kann so interpretiert werden, daß durch das äußere Feld auch Zerfälle der weniger verbotenen

Ordnungen $k = 0, \dots, \ell - 1$ möglich werden, d. h. daß tatsächlich die für den Vakuumzerfall gültigen Auswahlregeln aufgehoben werden. Um beispielsweise aus einem in erster Ordnung verbotenen Zerfall ($\ell = 1$) einen erlaubten Zerfallsprozeß ($k = 0$) zu erhalten, muß ein Photon absorbiert oder emittiert werden. Dies ist die physikalische Erklärung für unser Ergebnis, daß die Rate $\Gamma_1^{(0)}$ (4.48) für erlaubte Zerfälle bei einem im Vakuum in erster Ordnung verbotenen Prozeß proportional zu $(E_0/E_c)^2$ ist. Dieser Effekt ist von derselben Größenordnung wie der Korrekturterm $\Gamma_1^{(1)}$ zu $\Gamma_0^{(1)}$ aufgrund des Operators $\exp(-ie^2\pi/2m\hbar)$. Dies läßt sich auf Zerfälle beliebiger Verbotenheit verallgemeinern. Bei einem in ℓ -ter Ordnung verbotenen Zerfall bedingen Beiträge zur Ordnung k ($k < \ell$) Multiphoton-Prozesse der Ordnung $(\ell - k)$ und sind somit von der Größenordnung $\Gamma_{\ell-k}^{(k)} \sim (E_0/E_c)^{2(\ell-k)}$. Sie sind damit von derselben Größenordnung wie die Korrekturen $\Gamma_{\ell-k}^{(\ell)}$ zur ℓ -ten Ordnung aufgrund des Operators $\exp(-ie^2\pi/2m\hbar)$. Wir können festhalten, daß es zwar im äußeren Feld Beiträge von Ordnungen gibt, die ohne Feld verboten sind, doch sind diese Effekte im Gültigkeitsbereich der Bedingungen (4.40) - (4.42) verschwindend klein.

4.5 Vergleich mit anderen Arbeiten

Im folgenden soll unsere in den letzten Abschnitten entwickelte Theorie des verbotenen Betazerfalls im äußeren Feld verglichen werden mit Arbeiten aus dem letzten Jahr von H. Reiss zu demselben Thema. In Ref. 19 wird eine alternative Theorie für den verbotenen Betazerfall im äußeren Feld aufgestellt, die in Ref. 20 auf einige Beispiele angewandt wird. In einem als "Erweiterung der Theorie" bezeichneten Erratum [109] wird ein schwerwiegender analytischer Fehler in Ref. 19 zugegeben, die qualitativen Schlußfolgerungen werden jedoch ohne Beweis aufrechterhalten. In Ref. 66 wird unsere in diesem Kapitel entwickelte Theorie kritisiert, und in Ref. 110 und 111 wird versucht, eine einfache physikalische Erklärung für den vorhergesagten erheblichen Verstärkungseffekt zu liefern. Drei weitere Arbeiten [112-114] beschäftigen sich mit unseren in diesem Kapitel dargelegten Argumenten. Wegen der andauernden Diskussion in der Literatur über die Existenz des feldverstärkten Betazerfalls erscheint es angebracht, im Detail auf diese Kontroverse zwischen Reiss und uns einzugehen.

Wir wollen zuerst unsere in diesem Kapitel vorgestellte Theorie mit der in Ref. 19 und 20 abgeleiteten Theorie vergleichen. Während wir die totale Zerfallsrate nach Vertauschung von Orts-Zeit- (d^4x) und Impulsintegration $(d^3p d^3q)$ mit Hilfe von Greensfunktionen berechnet haben, wird in Ref. 19 der übliche Weg verfolgt, zuerst nach Orts- und Zeitintegration die partielle Zerfallsrate w zu gewinnen und dann über den Phasenraum zu integrieren. Beide Methoden starten von demselben S-Matrixelement (4.23). Ein Unterschied besteht darin, daß wir den nichtrelativistischen Grenzfall der Volkov-Wellenfunktion und ein zirkular statt linear polarisiertes Feld verwenden. Wie mehrfach betont, sollten diese Vereinfachungen keine entscheidenden Einflüsse auf das Ergebnis haben. Trotzdem gelangen Ref. 19 und 20 zu völlig anderen Ergebnissen als wir: in beiden Arbeiten werden große Verstärkungen der totalen Zerfallsrate für verbotenen Beta-Zerfall berechnet, die mit dem Grad der Verbotenheit stark anwachsen. Als entscheidender Intensitätsparameter, durch den die Lebensdauer eines Kerns modifiziert wird, wird die Größe

$$z = \frac{eaR}{\hbar} = \frac{R}{R_c} \quad (4.50)$$

identifiziert. In Feldern mit $z \gtrsim 1$ soll sich laut Ref. 19 die Lebensdauer von Kernen "dramatisch" reduzieren lassen. Da entsprechend Gl. (1.1) bei längerwelligen Feldern niedrigere Feldstärken ausreichen, um $v \sim 10^3$ und damit $z \sim 1$ zu erhalten, wurden in Ref. 20 Radiofelder im MHz-Bereich als geeignet für die Verstärkung verbotener Zerfälle vorgeschlagen. In Radiofeldern kann man heute tatsächlich Intensitäten entsprechend $v \sim 10^3$ erzeugen. In solch einem intensiven Radiofeld kann man laut Ref. 20 beispielsweise für ^{90}Sr eine Verstärkung der totalen Zerfallsrate von $R = \Gamma_{\text{field}}/\Gamma_{\text{vacuum}} \sim 4$ erwarten.

Diese Ergebnisse stehen in völligem Gegensatz zu unseren Berechnungen. Wie in Abschnitt 4.3 demonstriert, kann die totale Zerfallsrate nur wesentlich beeinflußt werden, wenn eine der Bedingungen (4.40) - (4.42) verletzt ist. Bei oben beschriebenem Experiment sind diese Bedingungen jedoch so gut erfüllt, daß die totale Zerfallsrate völlig unbeeinflußt bleiben sollte. Außerdem haben wir gefunden, daß bei erlaubtem wie bei in beliebiger Ordnung verbotenen Zerfall die Feldkorrekturen immer von derselben Größenordnung sind und nicht mit dem Grad der Verbotenheit ansteigen. Die in Ref. 20 berechnete Verstärkung $R = 4$ für ^{90}Sr ist zu vergleichen mit unserem Ergebnis $R = 1 + 2 \cdot 10^{-24}$. Dies ist ein Unterschied in den Feldeffekten um 25 Größenordnungen!

Wie sind diese enormen Unterschiede zu erklären? Zur Beantwortung dieser Frage ist es nützlich, erst einmal die Ref. 19 zugrundeliegende "Philosophie" zu erläutern: (i) Ref. 19 geht davon aus, daß der entscheidende physikalische Prozeß, der zur Beschleunigung von verbotenen Zerfällen im äußeren Feld führt, die Aufhebung der üblichen Auswahlregeln ist. Die Wechselwirkung mit den Photonen des äußeren Feldes dient also nicht dazu, Energie in dem Kern zu deponieren und so den Phasenraum des Zerfalls zu vergrößern. Diese Idee lag Ref. 18 und 23 zugrunde. In Ref. 19 werden die Photonen dagegen nur dazu benötigt, Drehimpuls aufzunehmen und die Parität zu ändern, um den Grad der Verbotenheit des Zerfalls zu reduzieren. Dieser Mechanismus zur Modifizierung der Lebensdauer sollte bei Feldern beliebiger Wellenlänge auftreten. Dies ist der Grund für den erstaunlichen Vorschlag, Kernzerfälle mit Radiofeldern zu beschleunigen. (ii) Der zweite grundlegende Gedanke in Ref. 19 besteht in der Annahme, daß die Aufhebung der üblichen Auswahlregeln im wesentlichen durch die Wechselwirkung zwischen Feld und Kern zustandekommt. Es wird behauptet, daß im Gegensatz zu den früheren Arbeiten [18,23] erstmals auch die Wechselwirkung zwischen Feld und Kern mit berücksichtigt wird. Es wird weiterhin in Ref. 19 angenommen, daß die Effekte aufgrund der Feld-Kern-Wechselwirkung viel stärker sind als die beiden Effekte, die üblicherweise den verbotenen Zerfall ermöglichen, so daß neben dem Kernrückstoß auch die Multipolentwicklung der ortsabhängigen Anteile $\exp(i\vec{p}\vec{r}/\hbar)$ in den leptonischen Wellenfunktionen vernachlässigt wird. In der Sprache unserer Theorie wird also nur die Wirkung des Operators J_0 auf die erlaubte ($k = 0$) reduzierte Rate $\gamma_0^{(0)}$ berechnet.

Es stellt sich die Frage, ob diese Vorstellung von den physikalisch wichtigen Prozessen überhaupt mit dem verwendeten Formalismus beschrieben wird. Es muß betont werden, daß wir zwar dasselbe Modell, d. h. dasselbe S-Matrixelement (4.23), verwenden wie Ref. 19, daß wir dieses Modell jedoch grundlegend anders interpretieren. Wir gehen davon aus, daß die S-Matrix (4.23) mit der Kernwellenfunktion (2.26) einen Zerfall beschreibt, bei dem genauso wie in Kap. III nur das emittierte Elektron durch das äußere Feld beeinflusst wird, nicht jedoch der Kern. In Ref. 19 wird die Wellenfunktion (2.26) dagegen im Sinne der sog. MTA-Wellenfunktion interpretiert. Danach soll sie einen wechselwirkenden Zustand in der R-Eichung beschreiben. Sie soll sogar aufgrund des "integrierenden Faktors" [64] $\exp(i\vec{e}\vec{A}\vec{r}/\hbar)$ die

Wechselwirkung mit dem Feld näherungsweise in jeder Ordnung enthalten und demnach besonders gut für Multiphotonprozesse geeignet sein. Entsprechend soll insbesondere dieser Faktor für die Aufhebung der Auswahlregeln und die Verstärkung des Zerfalls verantwortlich sein. Der Intensitätsparameter z (4.50) ist allein aus $\exp(i\vec{e}\vec{A}\vec{r}/\hbar)$ abgeleitet, die Volkov-Wellenfunktion, die die Wechselwirkung zwischen Feld und Elektron enthält, spielt nur eine untergeordnete Rolle in Ref. 19.

Die Interpretation der nuklearen Wellenfunktion (2.26) im Sinne der MTA-Methode ist jedoch falsch, wie in Abschnitt 2.2 und 2.4 ausführlich diskutiert wurde. Dort wurde gezeigt, daß es keine nennenswerte Wechselwirkung zwischen Kern und Feld gibt und daß die Kernwellenfunktion (2.26) die korrekte nichtwechselwirkende Wellenfunktion in der R-Eichung ist. Die Faktoren $\exp(i\vec{e}\vec{A}\vec{r}/\hbar)$ sind Eichphasen, die notwendigerweise auftreten, wenn man die Wellenfunktionen aller Teilchen konsistent in derselben Eichung wählt. Unsere Interpretation der Kernwellenfunktion (2.26) wird auch nachträglich nochmals bestätigt durch die explizite Berechnung des verbotenen Betazerfalls im äußeren Feld in Abschnitt 4.2 - 4.4 mit dem Ergebnis, daß die Feldeffekte bei erlaubtem (4.45) wie bei verbotenen Zerfall (4.49) sehr ähnlich sind. Angenommen, man wäre der Meinung, daß die nichtwechselwirkenden Zustände in jeder beliebigen Eichung dieselbe Form (2.14) hätten und daß der Eichfaktor $\exp(i\vec{e}\vec{A}\vec{r}/\hbar)$ in Gl. (2.26) eine Wechselwirkung zwischen Feld und Kern beschreiben würde, dann würde man bei Verwendung der Zustände (2.14) für erlaubten Zerfall Effekte der Ordnung $(E_0/E_c)^2$ erhalten, für verbotenen Zerfall jedoch nach Gl. (4.39) durch die Beiträge von ohne Feld verbotenen Ordnungen Effekte der Ordnung v^2 . Dagegen liefern die Zustände (2.26) nach Gl. (4.37) auch für verbotene Zerfälle Effekte der Ordnung $(E_0/E_c)^2$. Angesichts dieses Ergebnisses ist die Interpretation, daß Gl. (2.14) einen nichtwechselwirkenden und Gl. (2.26) einen wechselwirkenden Zustand beschreiben soll, paradox. Wir können also festhalten, daß den Rechnungen in Ref. 19 die falsche Annahme zugrunde liegt, daß es eine merkliche Wechselwirkung zwischen Kern und Feld gibt und daß diese Wechselwirkung näherungsweise zu jeder Ordnung in der Theorie enthalten ist.

Soweit liegen die Unterschiede zwischen unserer Arbeit und Ref. 19 nur in der Interpretation des verwendeten Formalismus. In Praxis gehen beide Arbeiten "zufällig" von derselben nuklearen Wellenfunktion und damit demselben S-Matrixelement (4.23) aus. Somit sollten die Rechnungen auch zu dem-

selben Ergebnis führen. Bei der analytischen Berechnung der totalen Zerfallsrate hat sich in Ref. 19 jedoch ein folgenschwerer elementarer Fehler eingeschlichen. Gleich zu Anfang der Rechnungen wurden in Gl. (56) und (57) von Ref. 19 bei der Entwicklung des "integrierenden Faktors" $\exp(i\vec{e}\vec{A}r/\hbar)$ nach Besselfunktionen gemäß Gl. (2.71) die Faktoren i^m vergessen, d. h. $\exp(iz\sin\alpha)$ und $\exp(iz\cos\alpha)$ wurden gleichbehandelt. Wenn dieser Fehler korrigiert wird, heben sich in der Übergangsrate in Ref. 19 alle feld- und ortsabhängigen Terme $\vec{A}r$, die verbotene Übergänge zu erlaubten ändern könnten, exakt gegeneinander auf [65]. Damit ist die in Ref. 19 berechnete Verstärkung der Zerfallsrate Null. Dies muß auch so sein, da in Ref. 19 aufgrund der verwendeten linearen Polarisierung die Volkov-Wellenfunktion nach verallgemeinerten Besselfunktionen entwickelt wird und diese verallgemeinerten Besselfunktionen - unbewußt - in der klassischen stationären Phasennäherung (A12) verwendet werden (siehe Gl. 94 in Ref. 19). Die fehlenden Faktoren i^m sind der Grund für die Diskrepanzen um 25 Größenordnungen zwischen unseren Rechnungen und Ref. 20.

In der Zwischenzeit wurde in Ref. 66 und 109 zwar der analytische Fehler in Ref. 19 angegeben, andererseits werden jedoch - ohne eine korrigierte Version für die Berechnung der totalen Zerfallsrate in Ref. 19 oder für die numerischen Beispiele in Ref. 20 vorzulegen - alle oben referierten Ergebnisse von Ref. 19 weiterhin qualitativ aufrechterhalten. Insbesondere soll die feldinduzierte Zerfallsrate für ^{90}Sr weiterhin in der Größenordnung der feldfreien Zerfallsrate liegen, so daß sich die Verstärkung im Bereich $R = \Gamma/\Gamma_{\text{vacuum}} \sim 2$ bewegt. Als einzig wesentlicher Unterschied zu der ursprünglichen Rechnung [19] wird jetzt behauptet [66,109], daß man für diese Verstärkung nicht mehr Felder mit $z \gtrsim 1$ (d. h. $v \gtrsim 10^3$) benötigt, sondern nur noch schwächere Felder mit $v \gtrsim 1$!

Alle diese Aussagen von Ref. 66 und 109 beruhen jedoch nur auf sehr groben Abschätzungen komplizierter Ausdrücke für die totale Zerfallsrate. Die exakte korrigierte Berechnung der totalen Zerfallsrate wird nur angedeutet: Um nichtverschwindende Feldeffekte zu erhalten, müssen nun in der asymptotischen Entwicklung der verallgemeinerten Besselfunktionen die nächsthöheren (nichtklassischen) Terme mitgenommen werden. Es wird also die Volkov-Wellenfunktion des Elektrons genauer berechnet. Diese Korrektur hat nichts zu tun mit dem "integrierenden Faktor" $\exp(i\vec{e}\vec{A}r/\hbar)$ und der ihm zugeschriebenen Kern-

Feld-Wechselwirkung. Bisher wurde nach Berücksichtigung der Korrekturen höherer Ordnung in der Volkov-Wellenfunktion nur die korrigierte doppel-differentielle Zerfallsrate $d^2\Gamma/dE d\Omega$ berechnet [66]. Aufgrund von Phasenraumfaktoren ist $d^2\Gamma/dE d\Omega$ stark feldabhängig. Dies ist in Übereinstimmung mit unseren Rechnungen in Kap. III, in dem allein aufgrund der Elektron-Feld-Wechselwirkung große Feldeffekte in der Energie- und Winkelverteilung der emittierten Elektronen gefunden wurden.

Die Berechnung der totalen Zerfallsrate Γ aus $d^2\Gamma/dE d\Omega$ wurde bisher von Reiss nicht veröffentlicht. Statt dessen wird in Ref. 66 und 109 derselbe Trugschluß gezogen, auf dem schon Ref. 18 und 23 basierten: Offenbar nur aufgrund der Tatsache, daß die differentielle Zerfallsrate $d^2\Gamma/dE d\Omega$ große Feldeffekte aufweist, wird darauf insistiert, daß auch nach Korrektur des analytischen Fehlers in Ref. 19 die "dramatische" Reduktion der nuklearen Zerfallszeit in Radiofeldern weiterhin existieren soll. Dies zeigt deutlich, daß eines der Hauptergebnisse der hier vorliegenden Arbeit, die Trennung von klassischen und Quanteneffekten in Prozessen, an denen Volkov-Zustände beteiligt sind, bisher nicht allgemein bekannt ist. Die Winkel- und Energieverteilung emittierter geladener Teilchen weist in einem langwelligen Feld relativ schnell (für $v \gtrsim 1$) große Feldeffekte auf. Dies sind jedoch klassische Effekte, die durch den Wechselwirkungsparameter v bestimmt sind. Diese Feldeffekte im Spektrum lassen keine Rückschlüsse auf die Feldeffekte in der totalen Zerfallsrate zu. Änderungen der Lebensdauer eines Kerns beruhen nur auf Quanteneffekten, deren Größe in einem langwelligen Feld durch den Parameter E_0/E_c bestimmt ist.

Wenn die Rechnungen in Ref. 19 korrigiert werden, sollten sie zu denselben Feldeffekten führen wie Gl. (4.35) mit (4.43) und (4.44). Der gegenseitigen Aufhebung aller $\vec{A}R$ -Terme in der korrigierten konventionellen Methode zur Berechnung der totalen Zerfallsrate in Ref. 19 entspricht in unserer Methode die in Abschnitt 4.2 beschriebene Aufhebung der Phasenfaktoren $\exp(i\vec{e}\vec{A}R/\hbar)$ aus den Kernwellenfunktionen gegen entsprechende Beiträge aus der Volkov-Wellenfunktion. Bei der Berücksichtigung der nächsthöheren Ordnung in Ref. 19 sind Feldeffekte zu erwarten, die dem Faktor $\exp(i\vec{e}\vec{R}/\hbar)$ in Gl. (4.28) entsprechen. Nach Gl. (4.27) hat dieser Faktor die Größenordnung

$$\frac{e|\vec{R}|}{\hbar} \sim \frac{eRE_0\tau}{\hbar} \sim z \frac{\hbar\omega}{Q} = \frac{R}{\lambda_c} \frac{E_0}{E_c} \frac{mc^2}{Q} \equiv z^1 .$$

Hierbei wurde ausgenutzt, daß $E_0 = \omega a$, $\omega\tau \ll 1$ und $\tau \sim \hbar/Q$ ist. Diese Größe z' tritt auch in Gl. (4.42) sowie in Gl. (2.37) für gebundene Zustände auf. Man kann also aus Gl. (4.27) direkt entnehmen, daß der entscheidende Intensitätsparameter für die Aufhebung der Auswahlregeln in einem langwelligen Feld nicht z oder ν , sondern $z' = z\hbar\omega/Q \ll z$ ist. Dies sollte auch aus der korrigierten und zu Ende geführten Rechnung zu Ref. 19 ersichtlich werden. Insbesondere sollte dabei auch bestätigt werden, daß der Sachverhalt genau umgekehrt liegt, als in Ref. 19 behauptet: Bei Berücksichtigung der Phasen $\exp(i\vec{e}\vec{A}r/\hbar)$ in den Kernwellenfunktionen ist z' und damit E_0/E_c der Feldparameter, bei Vernachlässigung dieser Phasen dagegen z bzw. ν .

Kürzlich wurde ein weiterer Versuch unternommen, die durch Radiofelder induzierte Verstärkung von Kernzerfällen physikalisch zu rechtfertigen [110]. Falls tatsächlich z der entscheidende Parameter für die Feldeffekte wäre, so würden bei immer längerwelligeren Feldern immer geringere Feldstärken ausreichen, um Kernzerfälle zu verstärken. Dies widerspricht aller intuitiven Erwartung. Normalerweise würde man vermuten, daß der Kern ein niederfrequentes Feld als quasistatisch empfindet und somit allenfalls statisch polarisiert werden kann. Übergänge sollten jedoch nicht induziert werden können, da, wie schon in Abschnitt II demonstriert, die Wechselwirkungsterme extrem klein sind. Zur Erklärung des "Paradoxons", daß trotzdem in niederfrequenten Feldern Betazerfälle induziert werden können, wird in Ref. 110 das "Postulat" aufgestellt, daß ein prinzipieller physikalischer Unterschied zwischen quasistatischen Feldern und elektromagnetischen Wellen, gleich welcher Wellenlänge, bestehe. Der Unterschied soll durch das Magnetfeld bedingt sein, das bei einem statischen Feld vernachlässigt wird, während es bei einer ebenen Welle immer vorhanden ist, so daß nur durch eine ebene Welle der Drehimpuls geändert werden kann. Weiterhin wird postuliert, daß in der R-Eichung die Wechselwirkung mit einem quasistatischen Feld durch $-e\vec{E}r$ beschrieben wird, die Wechselwirkung mit einer Welle aber durch $-\frac{e}{m}\vec{p}\vec{A}$. Dann wird mittels der üblichen Störungstheorie berechnet, daß ein Zwei-Stufen-Prozess, bei dem der erste Übergang durch das äußere Feld und der zweite durch die schwache Wechselwirkung bewirkt wird, S-Matrixelemente völlig verschiedener Größenordnung besitzt, je nachdem, ob für die elektromagnetische Wechselwirkung E_r oder pA verwendet wird. Dieser Unterschied soll auf dem Faktor $\hbar\omega/\Delta E$ (2.16) beruhen, um den sich die Matrixelemente von E_r und pA unterscheiden: in einem niederfrequenten Feld soll eine "ebene Welle" zu einer um $\Delta E/\hbar\omega$ größeren Übergangsamplitude führen als ein "quasistatisches Feld".

Diese Behauptung hat große Ähnlichkeit mit Ref. 115, in der behauptet wurde, die beiden Wechselwirkungen $\vec{E}\vec{r}$ und $\vec{p}\vec{A}$ führten in zweiter Ordnung Störungstheorie bei "nichtresonanten" Prozessen zu unterschiedlichen Übergangsraten. Dies veranlaßte eine Serie von Antworten, in denen diese Behauptung widerlegt wurde[59,116].Trotzdem wird nun in Ref. 110 behauptet, daß auch bei Prozessen, in denen die Energie erhalten ist, die zweite Ordnung Störungstheorie verschiedene Ergebnisse für $\vec{E}\vec{r}$ und $\vec{p}\vec{A}$ liefert, vorausgesetzt, eine nicht-elektromagnetische Wechselwirkung ist beteiligt.

Die Trugschlüsse in Ref. 110 sind ähnlicher Natur wie in Ref. 19: die zugrundeliegenden Voraussetzungen bzw. Postulate beruhen auf einer unzulässigen Interpretation und die Rechnungen auf elementaren Fehlern. Nach der ausführlichen Diskussion des Zusammenhangs der beiden Wechselwirkungen $\vec{E}\vec{r}$ und $\vec{p}\vec{A}$ in Kap. II ist die Behauptung, sie würden verschiedene physikalische Situationen beschreiben, nicht haltbar. Der elementare Fehler besteht darin, daß in der zweiten Ordnung Störungstheorie die Ununterscheidbarkeit der zeitlichen Reihenfolge des schwachen und des elektromagnetischen Übergangs nicht beachtet wurde. Wenn man die Kopplung des elektromagnetischen Feldes an alle geladenen Teilchen im Anfangs- und im Endzustand berücksichtigt, erhält man identische S-Matrixelemente für $\vec{r}\vec{E}$ -wie für $\vec{p}\vec{A}$ -Wechselwirkung [117]. Dazu müssen nur die Energieerhaltung in der S-Matrix, die Vollständigkeit der Zwischenzustände und die Vertauschbarkeit von schwacher und elektromagnetischer Wechselwirkung ausgenutzt werden [118].

In Ref. 111 wird der Fehler in Ref. 110 teilweise korrigiert, die Ergebnisse von Ref. 110 werden jedoch weiterhin aufrechterhalten. In Ref. 111 wird nun auch die Wechselwirkung im Endzustand berücksichtigt, allerdings nur zwischen Kern und Feld, nicht aber zwischen emittiertem Elektron und Feld. Es werden wieder unterschiedliche S-Matrixelemente für die $\vec{r}\vec{E}$ - und die $\vec{p}\vec{A}$ -Wechselwirkung berechnet. Dieses Ergebnis beruht jedoch nur auf den unterschiedlichen Kernladungen im Anfangs- und Endzustand, wie Ref. 111 zu entnehmen ist. Falls man das emittierte Elektron mit berücksichtigt, liefern beide Wechselwirkungen wieder dasselbe S-Matrixelement. Daß das emittierte Elektron mit berücksichtigt werden muß, wurde schon in Kap. II ausführlich diskutiert: die Eichinvarianz und die daraus folgende Ladungserhaltung verlangen, daß im Anfangs- und Endzustand alle geladenen Teilchen an das äußere Feld gekoppelt werden. Bei Berücksichtigung der Eichinvarianz existiert das angebliche Paradoxon also nicht!

Die drei jüngsten Arbeiten von Reiss [112-114] sind als Antwort auf die in diesem Kapitel entwickelte Theorie gedacht. Ref. 112 beschäftigt sich mit der in Anschluß an Gl. (4.28) diskutierten Methode, alle Wellenfunktionen in der E-Eichung zu bestimmen, um so die ganze Diskussion um die MTA-Wellenfunktion zu vermeiden. Statt jedoch aus diesem Verfahren zu schließen, daß in dem S-Matrixelement (4.23) keine Kopplung zwischen Feld und Kern enthalten ist und daß damit die MTA-Wellenfunktion in der R-Eichung einen ungestörten Zustand beschreibt, wird in Ref. 112 die widersprüchliche Behauptung aufgestellt, physikalische Interpretationen seien eichabhängig: in der R-Eichung soll das äußere Feld sowohl mit dem Kern als auch mit dem Elektron wechselwirken, in der E-Eichung soll dagegen nur das Elektron durch das äußere Feld beeinflußt werden.

In Ref. 113 wird versucht, unabhängig von unseren Rechnungen in Abschnitt 4.3 die Übergangsrate nach der in diesem Kapitel verwendeten Methode zu berechnen, wonach zuerst die Greensfunktionen bestimmt und dann erst die Zeitintegrationen ausgeführt werden. Ausgangspunkt von Ref. 113 ist Gl. (4.28), die aus Ref. 65 übernommen wurde. Während es uns jedoch in Abschnitt 4.3 gelungen ist, sowohl die t' - als auch die t -Integration in Gl. (4.28) mit Hilfe der Operatormethode exakt auszuführen, wird in Ref. 113 bereits die erste Integration über t' unter Verwendung der stationären Phasenmethode nur approximativ behandelt. Es werden die stationären Punkte bei Anwesenheit und bei Abwesenheit des äußeren Feldes miteinander verglichen. Ohne eine Integration explizit auszuführen, wird allein aus der Größenordnung von im äußeren Feld zusätzlich auftretenden stationären Phasenpunkten (deren Beitrag allerdings viel kleiner ist als der des weiterhin bestehenden feldfreien stationären Punktes, was in Ref. 113 nicht bemerkt wurde) geschlossen, daß die feldinduzierte Zerfallsrate für verbotene Betazerfälle von derselben Größenordnung wie die feldfreie Zerfallsrate sei (d. h. $R \sim 2$), entsprechend dem ursprünglich berechneten Wert in Ref. 20 für ^{90}Sr . In Abschnitt 4.3 wurde jedoch mehrfach betont, daß man mit Näherungsverfahren bei der Berechnung der Rate (4.28) sehr vorsichtig sein muß, da sich alle feldabhängigen Terme bis auf ein sehr kleines Restglied gegenseitig aufheben. Schließlich werden in Ref. 114 die Rechnungen aus Ref. 113 dazu benutzt, unser im nächsten Kapitel abzuleitendes Theorem zu bestreiten. Ref. 114 verwendet Ref. 113 als "Beweis" für die Existenz des feldinduzierten verbotenen Betazerfalls und damit als "Beweis durch Gegenbeispiel" für die Ungültigkeit des Theorems.

Nach unserer expliziten Berechnung der Feldkorrekturen zur totalen Zerfallsrate in diesem Kapitel, nach dem in Kapitel V abzuleitenden Theorem, nach dem Beweis, daß in der S-Matrix (4.23) nur das Elektron mit dem äußeren Feld wechselwirkt, nach dem Nachweis gravierender algebraischer Fehler in den Rechnungen von Reiss sowie nach Widerlegung der in Ref. 110 - 114 vorgebrachten Argumente zur Rechtfertigung der ursprünglichen Theorie in Ref. 19 kann kein Zweifel mehr daran bestehen, daß die Ergebnisse in Ref. 19 und 20 sowie die Behauptungen in Ref. 66 und 109 - 114 falsch sind. Die Theorie geht nicht über das in Ref. 18 und 23 verwendete Modell hinaus, wonach nur das Elektron mit dem äußeren Feld wechselwirkt. Alles, was in den bereits laufenden Experimenten[21] gefunden werden kann, ist der in Abschnitt 3.5 diskutierte klassische Effekt der "inversen Synchrotronstrahlung". Eine Verkürzung der Lebensdauer beta-zerfallender Kerne ist völlig ausgeschlossen.

Kapitel V

Ein Theorem für Zerfalls- und Streuprozesse in langwelligen Feldern

In den Kapiteln III und IV wurde gezeigt, daß für erlaubten wie für verbotenen Betazerfall die totale Zerfallsrate im quasiklassischen Grenzfall ($\hbar\omega \ll Q$, $E_0 \ll E_c$, $Q \gtrsim mc^2$) durch ein monochromatisches, zirkular polarisiertes Feld nicht beeinflußt wird. Die Vermutung ist naheliegend, daß dieses Ergebnis für beliebige Felder und beliebige Zerfallsprozesse gültig ist. Wir zielen in diesem Kapitel darauf ab, die Ergebnisse von Kap. III und IV auf ebene Wellenfelder beliebiger Polarisation und Frequenzzusammensetzung zu verallgemeinern. Dazu wollen wir die Volkov-Wellenfunktion (2.48) beibehalten, die die Bewegung eines geladenen Teilchens in einer beliebigen ebenen Welle beschreibt. Außerdem soll der Zerfallsprozess so allgemein wie möglich beschrieben und nicht nur auf Betazerfall beschränkt werden.

Ein weiteres Ziel dieses Kapitels ist es, die Ergebnisse von Kap. IV auf relativistische Elektronenkinematik zu verallgemeinern. Die Anfechtbarkeit des nichtrelativistischen Grenzfalles bei verbotenen Betazerfall wurde in Kap. IV diskutiert. Dort wurde dieser Grenzfall nur gewählt, um die Quantenkorrekturen abzuschätzen. Im vorliegenden Kapitel beschränken wir uns auf den quasiklassischen Bereich, wollen aber dafür den verbotenen Betazerfall relativistisch wie in Ref. 19 beschreiben.

Teile dieses Kapitels sind bereits in Ref. 119 und 120 dargestellt.

5.1 Ein Theorem für totale Zerfallsraten und Wirkungsquerschnitte

In diesem ersten Abschnitt sollen nur Streu- und Zerfallsprozesse freier Teilchen betrachtet werden. Die Ergebnisse sind also vorläufig nur auf den freien Neutronzerfall anwendbar. Gebundene Zustände und die Anwendung auf nuklearen Betazerfall werden erst in den folgenden Abschnitten diskutiert.

In diesem Kapitel sollen Polarisation und spektrale Zusammensetzung des elektromagnetischen Feldes nicht mehr spezifiziert werden. Wir geben nur eine ebene Welle mit Ausbreitungsvektor $n^\mu = (1, 0, 0, 1)$ ($\underline{n}^2 = 0$, $\underline{n}A = 0$) vor.

Die an dem Streu- oder Zerfallsprozess teilnehmenden Teilchen werden dann durch die Volkov-Wellenfunktion in der Form (2.48) beschrieben. Wir wollen auch keine Näherung großer Wellenlängen mehr verwenden, sondern die Ortsabhängigkeit des Feldes mit berücksichtigen. In diesem Fall ist es vorteilhaft, sog. lichtartige Koordinaten einzuführen [108,121]. Entgegen der üblichen Wahl der Einheitsvektoren

$$e_{\lambda}^{\mu} = \delta_{\lambda}^{\mu} \quad \lambda = 1, \dots, 4$$

wählen wir jetzt zur Aufspannung des Raums das Vierbein

$$e_{+}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 0, 1) \quad , \quad e_{-}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 0, -1) \quad , \quad e_{\perp}^{\mu} \quad , \quad e_z^{\mu} \quad .$$

Hierbei wurde vorausgesetzt, daß die Ausbreitungsrichtung des Feldes in z-Richtung liegt. Diese Vektoren bilden eine vollständige, orthogonale Basis des 4-dimensionalen Raumes. Die Bezeichnung "lichtartige Koordinaten" geht auf die Eigenschaft

$$e_{+}^{\mu} e_{+\mu} = e_{-}^{\mu} e_{-\mu} = 0 \quad , \quad e_{+}^{\mu} e_{-\mu} = 1$$

zurück. Die lichtartigen Komponenten eines beliebigen Vierervektors a^{μ} erhält man aus der Entwicklung nach den lichtartigen Koordinaten

$$a^{\mu} = a_{+} e_{+}^{\mu} + a_{-} e_{-}^{\mu} + a_{\perp} e_{\perp}^{\mu} + a_z e_z^{\mu} \quad .$$

Dabei sind die Komponenten a_{+} und a_{-} gegeben durch

$$a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_0 \pm a_3) \quad .$$

Zur Abkürzung der transversalen Komponenten a_1 und a_2 ist es nützlich, den Vektor

$$\vec{a}_T = (a_1, a_2, 0)$$

einzuführen. Damit hat das Skalarprodukt zweier Vierervektoren in lichtartigen Komponenten die Form

$$a^{\mu} b_{\mu} = a_{+} b_{-} + a_{-} b_{+} - \vec{a}_T \vec{b}_T \quad .$$

Insbesondere gilt

$$a_{\mu} e_{+}^{\mu} = a_{-}, \quad a_{\mu} e_{-}^{\mu} = a_{+} \quad .$$

Ausgedrückt durch lichtartige Koordinaten kann die Volkov-Wellenfunktion (2.48) - (2.50) in der R-Eichung geschrieben werden als ($n^{\mu} = \sqrt{2}e_{+}^{\mu}$)

$$\begin{aligned} \Psi(x; p, s) &= D_p(x_-) u(p, s) e^{-\frac{i}{\hbar}(p_+ x_- + p_- x_+ - \vec{p}_T \vec{x}_T - S_p(x_-))} \\ D_p(x_-) &= 1 + \frac{e}{2p_-} \not{e}_+ \not{A}(x_-) \\ S_p(x_-) &= \frac{e}{2p_-} \int^{x_-} d\phi (2e \vec{A}(\phi) \vec{p} - e \vec{A}^2(\phi)) \quad . \end{aligned} \quad (5.1)$$

Wichtig für die folgende Diskussion ist, daß die feldabhängigen Faktoren D und S_p nur von der Komponenten x_- abhängen. Der Normierungsfaktor $(2E\Omega)^{-1/2}$ des Spinors wurde in Gl. (5.1) weggelassen und wird später im Phasenraumelement berücksichtigt.

Wir nehmen für den Streu- oder Zerfallsprozeß einen Vier-Teilchen-Vertex an. Dies impliziert, daß der Abstandsbereich, in dem die Wechselwirkung von Null verschieden ist, klein ist gegen alle sonst auftretenden charakteristischen Längen. Damit kann der Hamilton-Operator in Analogie zu Gl. (3.1) geschrieben werden als

$$H = \{ \bar{\Psi}_3 \Gamma_a \Psi_1 \} \{ \bar{\Psi}_4 \Gamma_b \Psi_2 \} \quad . \quad (5.2)$$

Γ_a und Γ_b bezeichnen die Wechselwirkungsoperatoren. Die Operatoren Ψ_i vernichten Teilchen mit der Wellenfunktion (5.1). Die Verallgemeinerung für Antiteilchen ist entsprechend. Für neutrale Teilchen setzen wir in der Volkov-Wellenfunktion (5.1) die Ladung $e = 0$, so daß $D = 1$, $S_p = 0$ wird.

Das S-Matrixelement in erster Ordnung hat die Form

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int d^4x \overline{\Psi}(x_i, p_3, s_3) \overline{T}_a \Psi(x_i, p_1, s_1) \overline{\Psi}(x_i, p_4, s_4) \overline{T}_b \Psi(x_i, p_2, s_2) . \quad (5.3)$$

Nach Einsetzen der Volkov-Wellenfunktionen (5.1) und Integration über $d^2x_T dx_+$ kann S_{fi} geschrieben werden als

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} (2\pi\hbar)^3 \delta\left(\sum_i \varepsilon_i p_+^{(i)}\right) \delta^2\left(\sum_i \varepsilon_i \vec{p}_T^{(i)}\right) \int dx_- e^{-\frac{i}{\hbar} \sum_i \varepsilon_i (p_+^{(i)} x_- - S_{p^{(i)}}(x_-))} M_{fi}(x_-) . \quad (5.4)$$

Die Summationen erstrecken sich über die vier beteiligten Teilchen $i = 1, \dots, 4$ und der Vorzeichenfaktor ε_i ist gegeben durch $\varepsilon_i = 1$ für $i = 1, 2$ und $\varepsilon_i = -1$ für $i = 3, 4$. Das Matrixelement M_{fi} steht als Abkürzung für den Ausdruck

$$M_{fi}(x_-) = \left\{ \overline{u}(p_3, s_3) \overline{D}_{p_3}(x_-) \overline{T}_a D_{p_1}(x_-) u(p_1, s_1) \right\} \left\{ \overline{u}(p_4, s_4) \overline{D}_{p_4}(x_-) \overline{T}_b D_{p_2}(x_-) u(p_2, s_2) \right\} . \quad (5.5)$$

Das S-Matrixelement (5.4) soll nun im quasiklassischen Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ berechnet werden. Dazu verwenden wir die schon in Abschnitt 3.3 für ein zirkular polarisiertes Feld benutzte stationäre Phasenmethode. Unter der Voraussetzung, daß das Feld langsam im Vergleich zu dem Exponentialfaktor in Gl. (5.4) variiert, kann das Matrixelement M_{fi} als langsam veränderlich angenommen werden. Wir können damit Formel (3.24) auf die x_- -Integration in Gl. (5.4) anwenden. Zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit benötigen wir allerdings das Quadrat von Gl. (3.24):

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) e^{i\eta f(t)} \right|^2 = \frac{2\pi}{\eta} \sum_n \frac{|g(t_n)|^2}{|f''(t_n)|} . \quad (5.6)$$

Die Summe erstreckt sich über alle Nullstellen von $f'(t)$. In Gl. (5.6) wurden wieder nur die diagonalen Terme berücksichtigt. Kreuzterme zwischen ver-

schiedenen stationären Punkten existieren zwar, wie in Abschnitt 3.3 gesehen, doch oszillieren sie im Grenzwert großer Exponenten ($\hbar \rightarrow 0$) bei der geringsten Verteilung der Meßgrößen Energie und Emissionswinkel oder der Feldstärke so stark, daß in einem Experiment immer über die Kreuzterme gemittelt wird. In der klassischen Näherung müssen sie konsistenterweise vernachlässigt werden.

Unter Verwendung von Formel (3.36) kann Gl. (5.6) auch geschrieben werden in der Form [119]

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} dt q(t) e^{i\eta f(t)} \right|^2 = \frac{2\pi}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} dt |q(t)|^2 \delta(f'(t)). \quad (5.7)$$

Diese Form der stationären Phasenmethode erlaubt es, die Übergangswahrscheinlichkeit pro Volumen-Zeit-Element zu schreiben als

$$\begin{aligned} W &= \frac{|S_{fi}|^2}{\frac{1}{\sqrt{2}} L_1 L_2 (L_3 + T/c)} \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} (2\pi\hbar)^3 \delta\left(\sum_i \epsilon_i p_+^{(i)}\right) \delta^2\left(\sum_i \epsilon_i \vec{p}_T^{(i)}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dx_- w_i(x_-) \end{aligned} \quad (5.8)$$

mit

$$\begin{aligned} w_i(x_-) &= |M_{fi}(x_-)|^2 \delta\left(\sum_i \epsilon_i \left[p_+^{(i)} - \frac{\partial}{\partial x_-} S_{p^{(i)}}(x_-)\right]\right) \\ &= |M_{fi}(x_-)|^2 \delta\left(\sum_i \epsilon_i \left[p_+^{(i)} - \frac{e_i}{p_-^{(i)}} \vec{A}(x_-) \vec{p}^{(i)} + \frac{e_i^2}{2p_-^{(i)}} \vec{A}^2(x_-)\right]\right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Da das Vektorpotential nicht spezifiziert werden soll, kann die dx_- -Integration in Gl. (5.8) nicht weiter ausgeführt werden. Das Ergebnis zeigt, daß die Übergangswahrscheinlichkeit im quasiklassischen Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ als Integral über eine "instantane" Übergangswahrscheinlichkeit $w_i(x_-)$ dargestellt werden kann. Diese Größe ist - obwohl experimentell kaum zugänglich - eine echt-physikalische Größe im Sinne von Ref. 54. Als solche kann sie nur von anderen echt-physikalischen Größen abhängen wie dem kinetischen Impuls

$$\pi^\mu(x_-) = p_c^\mu - e \vec{A}^\mu(x_-),$$

nicht aber separat von nicht-physikalischen Größen wie dem Vektorpotential A^μ , dem kanonischen Impuls p_C^μ oder dem asymptotischen Impuls p^μ der Volkov-Wellenfunktion, für den nach Gl. (2.55)

$$\vec{p}_T = \vec{p}_T^C, \quad p_- = p_-^C$$

gilt.

Wir wollen nun explizit nachprüfen, daß das äußere Feld nur über den kinetischen Impuls π^μ in die instantane Rate (5.9) eingeht. Unter Ausnutzung der Bedingung, daß die Teilchen auf der Massenschale liegen

$$2p_+p_- - \vec{p}_T^2 = m^2c^2,$$

kann das Argument der Deltafunktion in Gl. (5.9) umgeschrieben werden zu

$$p_+ - \frac{e}{p_-} \vec{A}(x_-) \vec{p} + \frac{e^2}{2p_-} \vec{A}^2(x_-) = \frac{m^2c^2 + \vec{u}_T^2(x_-)}{2\pi_-}.$$

Hierbei wurde ausgenutzt, daß $p_- = p_-^C = \pi_-$ ist. Das Argument der Deltafunktion hängt also tatsächlich nur von den lichtartigen Komponenten π_- und π_T des kinetischen Impulses im Feld ab.

Da es unsere Absicht ist, die totale Zerfallsrate zu bestimmen, können wir zur Untersuchung der Feldabhängigkeit des Matrixelements (5.5) über alle Spins summieren:

$$\begin{aligned} & \sum_{S_1, S_2, S_3, S_4} |M_{fi}(x_-)|^2 \\ &= c^4 \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_{p_1}(x_-) (\cancel{p}_1 + u_1 c) \overline{\mathcal{D}}_{p_1}(x_-) \overline{\Gamma}_a \mathcal{D}_{p_3}(x_-) (\cancel{p}_3 + u_3 c) \overline{\mathcal{D}}_{p_3}(x_-) \overline{\Gamma}_a \right\} \\ & \quad \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_{p_2}(x_-) (\cancel{p}_2 + u_2 c) \overline{\mathcal{D}}_{p_2}(x_-) \overline{\Gamma}_b \mathcal{D}_{p_4}(x_-) (\cancel{p}_4 + u_4 c) \overline{\mathcal{D}}_{p_4}(x_-) \overline{\Gamma}_b \right\}. \end{aligned}$$

Die Abhängigkeit vom asymptotischen Impuls p^μ tritt also immer in Termen der Form $D(\cancel{p} + mc)\overline{D}$ auf. Diese Ausdrücke können umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned}
 & \bar{D}_p(x_-)(\not{p} + mc)\bar{D}_p(x_-) \\
 &= mc + \not{p} - e\not{A} - \frac{1}{2p_-} (2e\vec{p}\vec{A}(x_-) - e^2\vec{A}^2(x_-))\not{e}_+ \quad (5.10) \\
 &= \not{H} + mc.
 \end{aligned}$$

Der Impuls π^μ ist der über die Spins gemittelte kinetische Impuls (2.69) im Feld und liegt auf der Massenschale (2.70). Wegen $\pi^\mu = p_c^\mu - eA^\mu$ sowie Gl. (2.55) können wir seine Komponenten schreiben als

$$\pi^\mu(x_-) = \frac{m^2 c^2 + \vec{p}_\perp^2(x_-)}{2p_-} e_+^\mu + p_- e_-^\mu + p_+(x_-) e_+^\mu + p_z(x_-) e_z^\mu. \quad (5.11)$$

Damit ist gezeigt, daß auch das Matrixelement $|M_{fi}|^2$ in Gl. (5.9) nur von den Komponenten π_1 , π_2 und π_- des kinetischen Impulses im Feld abhängt.

Natürlich ist $|S_{fi}|^2$ auch ohne stationäre Phasennäherung immer eine physikalische Größe und hängt als solche nur von den kinetischen Impulsen der Teilchen im Feld ab. Aber wie schon in Kap. 4 gesehen, treten nach Quadrieren der S-Matrix die kinetischen Impulse π^μ an zwei verschiedenen Raum-Zeit-Punkten $\underline{x}$ und $\underline{x}'$ auf. Nur im quasiklassischen Grenzfall erhält man die Gleichzeitig-und-Räumlichkeitsbedingung, daß nur Punkte $\underline{x} = \underline{x}'$ zum Übergang beitragen. Nur dann kann die Übergangsrate in der Form (5.8) als Integral über eine instantane Rate dargestellt werden.

Zur Berechnung der totalen Übergangsrate muß die Rate w (5.8) bzw. die instantane Rate w_i (5.9) über den Phasenraum aller Teilchen im Endzustand integriert werden. Dazu werden die Integrationen über dx_- und über den Phasenraum vertauscht. Das Lorentz-invariante Volumenelement im Impulsraum hat die Form

$$\frac{d^3p}{2p_0} = \frac{dp_+ dp_z dp_-}{2p_-} = \frac{dp_+^c dp_z^c dp_-^c}{2p_-^c}.$$

Wie gewohnt bezeichnet p den asymptotischen Impuls in der Volkov-Wellenfunktion und p^c den kanonischen Impuls. Im quasiklassischen Grenzfall (5.9) können wir nun einen entscheidenden Trick einführen. Da der kinetische Impuls π^μ nur an einem Raum-Zeit-Punkt x_- auftritt, können wir anstelle des kanonischen Impulses p^c auch über den kinetischen Impuls im Feld integrieren

$$\frac{d^3 p}{2 p_0} \longrightarrow \frac{d\pi_1 d\pi_2 d\pi_-}{2\pi_-} . \quad (5.12)$$

Wir haben oben bewiesen, daß das Vektorpotential nur über die Kombination $\pi_\mu = p_\mu^c - eA_\mu$ als kinetischer Impuls in die instantane Rate (5.9) eingeht. Wenn wir nun annehmen, daß wir im Anfangszustand neutrale Teilchen haben, so daß die kinetischen Impulse der Teilchen im Anfangszustand feldunabhängig sind, und geladene Teilchen nur im Endzustand auftreten, so ist die totale Übergangsrate nach Integration über den Phasenraum der geladenen Teilchen offensichtlich unabhängig vom äußeren Feld. Das äußere Feld ist sogar schon nach Integration über π_1 und π_2 eliminiert, so daß auch die partiellen Wirkungsquerschnitte bzw. Zerfallsraten bzgl. p_- feldunabhängig sind. Da die instantane Rate w_i nur über das Vektorpotential von x_- abhängt, ist nach Integration über den Phasenraum auch die Abhängigkeit von x_- eliminiert, so daß die x_- -Integration in Gl. (5.8) redundant ist. Damit ist das Theorem bewiesen, daß totale Zerfallsraten und Wirkungsquerschnitte im quasiklassischen Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ von einem äußeren Feld unbeeinflusst sind, wenn Teilchen nur im Endzustand mit dem Feld wechselwirken.

Im folgenden wollen wir den Anwendungsbereich dieses Theorems diskutieren und einige Spekulationen anstellen, inwieweit sich dieses Theorem über den hier vorgeführten Beweis hinaus evtl. verallgemeinern läßt. In der hier abgeleiteten Form gilt das Theorem für den Zerfall neutraler Elementarteilchen wie z. B. $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ und den entsprechenden Streuprozess $n + \nu \rightarrow p + e^-$. In den nächsten Abschnitten wird das Theorem auf gebundene Zustände verallgemeinert, so daß es auch erlaubte wie verbotene nukleare Betazerfälle abdeckt. Natürlich ist dieses Theorem nicht auf Spin-1/2-Teilchen und 4-Teilchen-Vertices beschränkt. Die Verallgemeinerung bzw. Spezialisierung auf Teilchen, die sich durch Volkov-Lösungen der Klein-Gordon- oder der Schrödinger-Gleichung darstellen lassen, ist trivial [119,120]. Dann kann eine beliebige Anzahl von Teilchen im Endzustand auftreten.

Vermutlich kann das Theorem noch für eine größere Klasse von Zuständen der geladenen Teilchen bewiesen werden, als wir hier betrachtet haben. Die von uns verwendete Volkov-Wellenfunktion (5.1) beschreibt Teilchen in einer ebenen elektromagnetischen Welle. Wahrscheinlich gilt das Theorem jedoch auch für beliebige konstante Felder. Es ist beispielsweise bekannt, daß ein

konstantes Magnetfeld und konstante gekreuzte Felder die Lebensdauer von Elementarteilchen nicht beeinflussen, solange die Stärke des Magnetfeldes klein gegen das kritische Magnetfeld $B_c \approx 4.4 \cdot 10^{13}$ G ist [13,24,25]. Das Theorem läßt sich vermutlich weiterhin ganz allgemein auf Situationen ausdehnen, in denen die Wellenfunktion der geladenen Teilchen gut im Rahmen der WKB-Näherung in der Form

$$\psi \sim e^{i \frac{S}{\hbar}}(t)$$

mit einer klassischen Wirkung S beschrieben wird. Die Volkov-Wellenfunktion kann ja auch als WKB-Wellenfunktion aufgefaßt werden, da im Fall der Bewegung eines freien Teilchens in einem äußeren Feld die WKB-Näherung exakt ist. Das Theorem sollte weiterhin nicht nur auf schwache Wechselwirkung beschränkt sein. Auch elektromagnetische Zerfallsprozesse wie z. B. die innere Konversion beim Zerfall eines Atomkerns oder der elektromagnetische Zerfall von Elementarteilchen in einem intensiven Laserfeld oder auch die Autoionisation aus der Atomhülle in einem Radiofeld sollten darunterfallen, was die Wechselwirkung im Endzustand betrifft. (Das Theorem sagt jedoch nichts darüber aus, inwieweit die Wechselwirkung im Anfangszustand die totale Zerfallsrate beeinflußt.)

Das hier abgeleitete Theorem hat Ähnlichkeit mit einem Ergebnis, das in Ref. 122 in Zusammenhang mit Untersuchungen zur Infrarotdivergenz in der Quantenelektrodynamik gefunden wurde. Dort wurde gezeigt, daß der totale Wirkungsquerschnitt eines Streuprozesses unabhängig ist von dem Vorhandensein einer beliebigen Anzahl weicher Photonen in einem kohärenten Zustand, entsprechend einem klassischen Zustand des Feldes. Dies gilt für die Wechselwirkung mit weichen Photonen im Eingangs- wie im Ausgangszustand.

Der Gültigkeitsbereich des quasiklassischen Grenzfalles wurde in Abschnitt 3.4 diskutiert. Wir fanden, daß (i) die Feldstärke klein gegen die kritische Feldstärke sein muß, $E_0 \ll E_c$; (ii) daß die Photonenenergie klein gegen die kinetische Energie des ankoppelnden Teilchens sein muß, $\hbar\omega \ll Q$; und (iii) daß das Teilchen auch ohne äußeres Feld relativistisch sein muß, $Q \gtrsim mc^2$. Insbesondere diese letzte Bedingung ist zu beachten. Daß die totale Übergangsrate mit kleiner werdender Zerfallsenergie sensitiver für ein äußeres Feld wird, wurde bereits in Ref. 25 vermerkt. Das Theorem ist also insbesondere nicht anwendbar auf Prozesse, die nicht ohne äußeres Feld stattfinden. Darunter fallen beispielsweise induzierte Zerfälle natürlich

stabiler Teilchen oder die Multiphotonionisation aus der Atomhülle, die theoretisch berechnet [76] und experimentell eindrucksvoll nachgewiesen wurde für Ionen, zu deren Erzeugung größenordnungsmäßig bis zu 100 Photonen simultan absorbiert werden müssen [123].

Falls im Eingangszustand geladene Teilchen auftreten, kann die totale Übergangswahrscheinlichkeit durch ein äußeres Feld beeinflusst werden. Hierunter fallen beispielsweise die in Ref. 24, 25, 31 und 32 untersuchten Zerfälle von geladenen Elementarteilchen einschließlich der zugehörigen Streuprozesse sowie die Potentialstreuung eines geladenen Teilchens [91] oder die Coulombanregung eines Kerns durch ein geladenes Projektil [49]. In Analogie zu der in Anschluß an Gl. (5.12) diskutierten Überlegung, daß man bei einem neutralen Anfangszustand durch Summation über alle Endzustände das äußere Feld aus der totalen Zerfallsrate eliminiert, erhält man bei einem geladenen Anfangszustand nach Summation über alle möglichen Anfangsimpulse für die totale Rate wieder den feldfreien Wert. Bei einigen Anfangsimpulsen wird man also eine Verstärkung der totalen Übergangswahrscheinlichkeit durch das äußere Feld erhalten, die durch eine Verringerung bei anderen Anfangsimpulsen kompensiert wird. Daher kann man klassisch auch keinen Zerfall stabiler Teilchen mit einem äußeren Feld induzieren, da die Übergangsrate ohne Feld für alle Anfangsimpulse Null ist.

Klassisch kann man leicht verstehen, was ein äußeres Feld bei geladenen Teilchen im Anfangszustand bewirkt. Ein Teilchen mit Energie E im Labor hat nach Einschalten des Feldes eine zeitabhängige Energie $H(\tau)$, die wieder entsprechend der Funktion $P(E)$ (3.34) verteilt ist. Ein Streuprozess im Feld kann also klassisch simuliert werden durch Streuprozesse im Vakuum bei der Energie $H(\tau)$, wobei über diese Prozesse entsprechend $P(E)$ gewichtet werden muß. Diese Verschmierung der Energie aufgrund von $P(E)$ kann allerdings vermieden werden mit einem Teilchenpuls, dessen Ausdehnung klein ist gegen die räumliche Variation des Feldes. Aus dieser Anschauung heraus kann man vermuten, daß das äußere Feld bei Prozessen mit geladenen Teilchen im Anfangszustand zwar den totalen Wirkungsquerschnitt beeinflusst, der ja von der Energie im Schwerpunktsystem abhängt, daß aber andererseits die Lebensdauer zerfallender Teilchen unbeeinflusst bleibt. Von diesem klassischen Grenzfall sind wieder Prozesse ausgenommen, die ohne Feld nicht stattfinden, wie z. B. die Compton-Streuung $e \rightarrow e\gamma$ [28] oder die Neutrino-Paarerzeugung durch ein Elektron $e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ [25].

5.2 Anwendung auf erlaubten nuklearen Betazerfall

In diesem Abschnitt soll die Theorie aus Kapitel III auf beliebige ebene Wellen verallgemeinert werden. Dazu müssen die Rechnungen des letzten Abschnitts etwas modifiziert werden, da die Zustände der gebundenen Nukleonen nicht durch Volkov-Wellenfunktionen (5.1), sondern durch die nicht-wechselwirkenden Wellenfunktionen (2.26) beschrieben werden. Wie in Kap. III und im Gegensatz zum letzten Abschnitt wollen wir wieder die Näherung großer Wellenlängen für das Feld einführen. Damit entfällt die Notwendigkeit, lichtartige Koordinaten zu verwenden. Wir benötigen nur die Impuls-komponenten (2.62).

Unter Verwendung aller Näherungen, die zu dem S-Matrixelement (3.4) für erlaubten Betazerfall führten, erhalten wir die auf beliebige ebene Wellen verallgemeinerte Form von Gl. (3.4)

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \frac{g}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{\frac{i}{\hbar} [(E+E_\gamma - \Delta E_N)t - S_p(t)]} M_{fi}(t). \quad (5.13)$$

Das Matrixelement M_{fi} ist in Gl. (3.5) definiert und die Faktoren $S_p(t)$ und $D(t)$ aus der Volkov-Wellenfunktion in Gl. (2.48) - (2.50) (mit der Näherung großer Wellenlängen $\underline{n}x \approx ct$). Nach Einsetzen dieser Definitionen in Gl. (5.13) erhalten wir im quasiklassischen Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ mittels Gl. (5.7) die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt w_i(t) \quad (5.14)$$

mit der instantanen Rate

$$w_i(t) = \frac{\pi}{\hbar} g^2 |M_{fi}(t)|^2 \delta(H(t) + E_\gamma - \Delta E_N). \quad (5.15)$$

$H(t)$ ist identisch mit Gl. (3.30) und bezeichnet die über den Spin gemittelte kinetische Energie $c\tilde{\pi}_0(t)$ (2.69) eines Volkov-Teilchens:

$$H(t) = E - \frac{c}{2p_N} (2e\vec{A}(t)\vec{p} - e^2 \vec{A}^2(t)). \quad (5.16)$$

Gl. (5.15) ist die Rechtfertigung für Gl. (3.35), die in Abschnitt 3.4 nur durch das plausible Argument gefunden wurde, daß im klassischen Grenzfall die Vakuumenergie T in Gl. (3.29) durch die Energie $H(t)$ im Feld ersetzt werden kann. Wir entnehmen aus Gl. (5.15) auch, warum die klassischen Überlegungen in Abschnitt 3.4 die Übergangsrate (3.17) nur bis auf den Faktor $(\Delta E_N - E_V)/E$ reproduzieren konnten: die Zeitabhängigkeit des Matrixelements $M_{fi}(t)$ konnte in der Verteilungsfunktion $P(E)$ (3.35) nicht berücksichtigt werden. Gl. (5.14) macht die Bezeichnung "instantane Rate" für w_i verständlich, denn in der Näherung großer Wellenlängen hängt das Feld und damit w_i nur noch von der Zeit t ab. Der Vergleich zwischen Gl. (5.8) und (5.14) zeigt, daß in Gl. (5.14) die drei bereits ausgeführten Integrationen keine Deltafunktionen für die Impulserhaltung liefern, sondern auf die Fermi- und Gamov-Teller-Matrixelemente führen, die in M_{fi} (Gl. (3.5)) enthalten sind.

Als nächstes soll gezeigt werden, daß die instantane Rate (5.15) nur von den Komponenten $\pi_T(t)$ und $\pi_d = \pi_0 - \pi_3$ des kinetischen Impulses im Feld abhängt. Dazu schreiben wir Gl. (5.16) unter Berücksichtigung von Gl. (3.18) um zu

$$H(t) = c \frac{\bar{w}_d^2 + \bar{w}_T^2(t) + w_c^2}{2\bar{w}_d} \quad (5.17)$$

Für das Matrixelement $|M_{fi}|^2$ erhalten wir nach Summation über alle Spins im Endzustand und Mittelung über die Anfangsspins

$$\frac{1}{2I_A + 1} \sum_{M_i M_f} \sum_{S S_3} |M_{fi}(t)|^2 = 8C_V^2 |V_{fi}|^2 E_3 H(t) + (T_{\text{Fermi}} \propto \vec{q}) \quad (5.18)$$

Hierzu wurden Gl. (5.10) und (5.11) ausgenutzt. Nach Summation über die Spins hat die instantane Rate (5.15) demnach die Form

$$w_i(t) = \frac{8\pi \hbar^5}{w_c^4} G^2 |V_{fi}|^2 E_3 H(t) \delta(H(t) + E_3 - \Delta E_N) + (T_{\text{Fermi}} \propto \vec{q}) \quad (5.19)$$

Um dies mit der feldfreien Rate (3.29) vergleichen zu können, muß die Normierung der Spinoren berücksichtigt werden. Dazu ist Gl. (5.19) durch $(4EE_V \Omega_V)$ zu dividieren. Dann erkennt man, daß sich die instantane Rate w_i (5.19) im Feld von der feldfreien Rate w_f (3.29) nur dadurch unterscheidet, daß (i) die Vakuumenergie T durch die Energie $H(t)$ im Feld ersetzt ist,

und daß (ii) ein zusätzlicher Faktor $H(t)/E$ auftritt, der aufgrund der Deltafunktion in Gl. (5.19) auch als $(\Delta E_N - E_\nu)/E$ geschrieben werden kann.

Zur Berechnung der totalen instantanen Rate muß Gl. (5.19) über den Phasenraum von Elektron und Neutrino integriert werden. Dabei integrieren wir wie im letzten Abschnitt über den kinetischen (5.12) anstelle des kanonischen Impulses des Elektrons

$$\begin{aligned} \Gamma_i(\star) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3 2E} \int \frac{d^3 q}{(2\pi\hbar)^3 2E_\nu} \mathcal{L}_i(\star) \\ &= \frac{1}{8c(2\pi\hbar)^6} \int \frac{d^3 q}{E_\nu} \int \frac{d\pi_d d\pi_r^2 d\varphi}{\pi_d} \mathcal{L}_i(\star). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Bereits nach der Integration über $d\pi_T^2$ ist das äußere Feld und damit auch die Zeitabhängigkeit aus Gl. (5.20) eliminiert. Die totale Zerfallsrate ist im quasiklassischen Grenzfall also unabhängig von jedem äußeren Feld, das sich als ebene Welle beliebiger Polarisierung und Frequenzzusammensetzung darstellen läßt. Dasselbe gilt für die Spektren bzgl. p_d und φ sowie die Verteilung der Neutrinos.

Zur Kontrolle kann explizit nachgeprüft werden, daß Gl. (5.20) mit der instantanen Rate (5.19) tatsächlich die feldfreie Rate Γ_0 (3.44) liefert. Dieser Beweis ist sehr einfach, wenn man in Gl. (5.19) den Faktor $H(t)$ wegen der Deltafunktion durch $E_0 - E_\nu$ ersetzt und die drei nichttrivialen Integrationen in (5.20) genauso wie in Abschnitt 3.6 in der Reihenfolge $d\pi_T^2 \equiv ds$, dann $d\pi_d$ und zuletzt dE_ν ausführt. Die Integrationsgrenzen ergeben sich aus der Bedingung, daß das Argument der Deltafunktion in Gl. (5.19) Nullstellen haben muß. Dann findet man, daß $\Gamma_i(t)$ (5.20) tatsächlich mit der freien Zerfallsrate Γ_0 (3.44) übereinstimmt.

5.3 Anwendung auf verbotenen nuklearen Betazerfall

Der verbotene Betazerfall soll im Rahmen des in Ref. 19 verwendeten Modells behandelt werden. Im Gegensatz zur Behandlung in Kapitel IV wird das Elektron nun durch die relativistische Volkov-Wellenfunktion (2.48) beschrieben. Um verbotenen Zerfall zu beschreiben, muß die räumliche Variation aller Wellenfunktionen berücksichtigt werden, so daß die Näherungen großer

Wellenlängen nicht mehr verwendet werden kann. Wie in Ref. 19 wird jedoch der zweite Effekt, der verbotene Übergänge ermöglicht, nämlich der Rückstoß des Kerns, vernachlässigt, so daß der Kern durch die nichtrelativistische Wellenfunktion (2.26) beschrieben werden kann.

Die für Volkov-Wellenfunktionen in beliebigen Feldern verallgemeinerte Version des S-Matrixelements (3.3) hat die Gestalt

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \frac{g}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r e^{\frac{i}{\hbar} [(p+q)x - S_p(\underline{u}_x) + e\vec{A}(\underline{u}_x)\vec{r} - \Delta E_N t]} \quad (5.21)$$

$$* G(\vec{r}, \underline{u}_x)$$

mit

$$G(\vec{r}, \underline{u}_x) = \left\{ \delta_{\mu 0} C_V \bar{\Phi}_N^*(\vec{r}) M_F^{(+)} \bar{\Phi}_N(\vec{r}) - \delta_{\mu k} C_R \bar{\Phi}_N^*(\vec{r}) (\vec{M}_{GF}^{(+)})_k \bar{\Phi}_N(\vec{r}) \right\} \quad (5.22)$$

$$\left\{ \bar{u}(p, s) \bar{D}(\underline{u}_x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(q, s) \right\}.$$

Der wesentliche Unterschied zu dem S-Matrixelement (5.13) für erlaubten Zerfall besteht in dem Faktor $\exp(i e \vec{A} \vec{r} / \hbar)$ in Gl. (5.21), der aus der richtig geeichten Kernwellenfunktion herrührt und von Ort und Zeit abhängt.

Für die formale Durchführung der Rechnungen ist es günstiger, die Näherung großer Wellenlängen für das Feld nicht explizit zu benutzen und statt t die Variable $u = x_0 - x_3$ einzuführen. Nach Umgruppierung der einzelnen Terme in Gl. (5.21) bzgl. u kann S_{fi} (5.21) geschrieben werden als

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar c} \frac{g}{\sqrt{2}} \int du e^{\frac{i}{\hbar} [(p_0+q_0-\Delta E_N/c)u - S_p(u)]} \quad (5.23)$$

$$F(\vec{p}_T + \vec{q}_T - e\vec{A}(u); \frac{\Delta E_N}{c} - p_0 + p_3 - q_0 + q_3; u).$$

Der Formfaktor F ist gegeben durch [120]

$$F(\vec{a}_T; b; u) = \int d^3r e^{-\frac{i}{\hbar} (\vec{a}_T \vec{r}_T + b z)} G(\vec{r}, u). \quad (5.24)$$

Dieser Formfaktor entspricht der Fourier-Transformierten von Gl. (5.22). Er unterscheidet sich von dem Matrixelement M_{fi} (3.5) durch den Exponentialfaktor im Integranden von Gl. (5.24). Zur exakten (d. h. über den klassischen Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ hinausgehenden) Berechnung verbotener Übergänge kann eine Multipolentwicklung dieses Faktors vorgenommen werden.

Zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit wenden wir wieder die stationäre Phasenmethode auf die u -Integration in Gl. (5.23) an. Der Formfaktor kann als langsam veränderlich in u angenommen werden. Für das elektrische Feld und damit $G(\vec{r}, u)$ wurde dies schon früher gezeigt. Daß sich auch der neu hinzugekommene Faktor $\exp(i\vec{e}\vec{A}r/\hbar)$ langsam im Vergleich zu der Exponentialfunktion in Gl. (5.24) ändert, kann mit Hilfe der Eigenschaften der Fourier-Transformierten F bestätigt werden. Noch einfacher kann man dies erkennen, wenn man sich überzeugt, daß

$$e\vec{A}r \ll S_p \quad (5.25)$$

ist. Für eine monochromatische, zirkular polarisierte Welle kann dies leicht gezeigt werden. A und S_p oszillieren mit derselben Frequenz ω . Die Ortsintegration erstreckt sich nur über den Kern mit Radius R , so daß $r \leq R$ ist. Gemäß Gl. (2.60) kann Gl. (5.25) geschrieben werden als

$$e\omega R/\hbar \ll z.$$

Diese Beziehung ist erfüllt, wenn

$$\frac{p_d}{p_T} \frac{R}{\lambda} \ll 1$$

gilt. Hierzu wurden Gl. (2.65) und (2.66) ausgenutzt. Solange also die Wellenlänge des Feldes groß gegen die Kerndimensionen ist, ist Gl. (5.25) eine sehr gute Näherung.

Nach der Substitution $M_{fi} \rightarrow F$ kann somit der Beweis, daß auch bei verbotenem Betazerfall die totale Zerfallsrate durch ein äußeres Feld unbeeinflusst bleibt, in direkter Analogie zu Abschnitt 5.2 durchgeführt werden. Die stationäre Phasenmethode (5.7) liefert für die instantane Übergangsrate

$$w_i(u) = \frac{\bar{u}}{2} g^2 \left| F(\vec{p}_T + \vec{q}_T - e\vec{A}(u); \frac{\Delta E_N}{c} - p_0 + p_3 - q_0 + q_3; u) \right|^2 \delta(H(u) + \bar{E}_\gamma - \Delta E_N) \quad (5.26)$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß die instantane Rate nur über den kinetischen Impuls $\vec{\pi}_T(u) = \vec{p}_T - e\vec{A}(u)$ von u abhängt. Für $H(u)$ wurde dies in Gl. (5.17) gezeigt. Im Formfaktor $|F|^2$ geht u in den Faktor $G(\vec{r}, u)G^*(\vec{r}', u)$ nur über die Größe $D(u)$ aus der Volkov-Wellenfunktion ein. Nach Summation über die Spins können Gl. (5.10) und (5.11) ausgenutzt werden, um zu zeigen, daß dieser Faktor nur von π_T und π_d abhängt. Für den verbleibenden Exponentialfaktor in Gl. (5.24) kann dies ebenfalls leicht gezeigt werden, wenn man den Formfaktor in Gl. (5.24) in der Form

$$F(\vec{\pi}_T(u) + \vec{q}_T; \frac{\Delta E_N}{c} - \bar{u}_d - q_0 + q_3; u)$$

schreibt. Damit ist gezeigt, daß das äußere Feld nur über die Komponenten π_1, π_2, π_d des kinetischen Impulses in die instantane Rate $w_i(u)$ (5.26) eingeht. Nach Integration über den Phasenraum (5.12) ist die totale Zerfallsrate für verbotenen Betazerfall beliebiger Ordnung unabhängig vom äußeren Feld.

Kapitel VI

Zerfallsprozesse aufgrund der Kern-Feld-Wechselwirkung; Störungstheorie

In den vorangehenden Kapiteln III - V wurde nur der Feldeinfluß auf Kernzerfälle aufgrund der Wechselwirkung im Endzustand zwischen äußerem Feld und emittierten geladenen Teilchen untersucht (Keldysh-Näherung). Es wurde gefunden, daß zur Beeinflussung der Lebensdauer eines Kerns entweder die Feldstärke vergleichbar sein muß mit der kritischen Feldstärke E_c (1.2) oder die Photonenenergie mit der beim feldfreien Zerfall freigesetzten Energie. Eine weitere Möglichkeit, mit einem äußeren Feld die Lebensdauer eines Kerns zu beeinflussen, besteht in der Wechselwirkung zwischen dem Kern selbst und dem Feld. Diese Wechselwirkung ist Gegenstand dieses und des folgenden Kapitels.

Wir wollen in diesem Kapitel die Kern-Feld-Wechselwirkung ganz allgemein für Felder beliebiger Wellenlänge untersuchen. Wir werden sowohl Laserfelder betrachten, deren Photonenenergie sehr klein gegen eine nukleare Anregungsenergie ist, als auch Röntgen- und Gammafelder [41], die fast in Resonanz mit einer Anregungsenergie sind. Der Schwerpunkt dieses Kapitels wird auf dieser quasi-resonanten Anregung liegen. Wir haben in Abschnitt 2.3 abgeschätzt, daß in einem langwelligen Feld die Wechselwirkung zwischen Kern und Feld sehr gering ist. Andererseits haben wir jedoch auch gesehen, daß diese Wechselwirkung nicht mehr vernachlässigt werden kann, wenn die Feldstärke vergleichbar wird mit der kritischen Feldstärke, d. h. bei derselben Feldstärke, bei der die Wechselwirkung mit geladenen emittierten Teilchen zur Änderung der Lebensdauer führt. In einem quasiresonanten Feld reicht eine wesentlich geringere Feldstärke zur Modifizierung der Lebensdauer aus. Durch die Kern-Feld-Wechselwirkung sind dieselben zwei Einflüsse auf die totale Zerfallsrate zu erwarten wie bei der Wechselwirkung zwischen emittierten geladenen Teilchen und Feld: durch Energieabsorption aus dem Feld kann der Phasenraum des Zerfalls vergrößert werden und durch Übergang in einen virtuellen Kernzustand, dessen Spin und Parität sich von dem Ausgangszustand unterscheiden, kann das äußere Feld Drehimpuls aufnehmen oder abgeben, wodurch die feldfreien Auswahlregeln geändert werden.

Zur theoretischen Beschreibung der Kern-Feld-Wechselwirkung müssen wir über die Keldysh-Näherung hinausgehen. Wie in Abschnitt 2.4 ausführlich diskutiert, gibt es für ein Nukleon, das im Kern gebunden ist und mit einem äußeren Feld wechselwirkt, weder eine exakte noch eine geeignete nicht-störungstheoretische näherungsweise Lösung der Schrödinger-Gleichung. Wir werden daher auf die Störungstheorie zurückgreifen. Wir werden nur den einfachsten Fall eines Zwei-Stufen-Prozesses betrachten, bei dem ein einzelnes Photon durch den Kern absorbiert wird, der dann aus einem virtuellen Zwischenniveau spontan in den Endzustand zerfällt. Ziel ist es, die Feldparameter (Intensität und spektrale Breite bei vorgegebener Wellenlänge) zu bestimmen, bei denen die Rate für photoinduzierte Prozesse vergleichbar wird mit der Rate für natürliche radioaktive Zerfälle. Da nur Ein-Photon-Prozesse untersucht werden sollen, können emittierte geladene Teilchen wieder wie im feldfreien Fall durch ebene Wellen statt Volkov-Wellenfunktionen beschrieben werden.

Wir wollen in diesem Kapitel nicht auf bekannte Formeln für die zweite Ordnung Störungstheorie wie den Breit-Wigner-Wirkungsquerschnitt [124] zurückgreifen, sondern die Rechnungen noch einmal neu ableiten für den allgemeinen Fall beliebiger Feldfrequenzen. Dies wird uns in Abschnitt 6.2 zu einer Verallgemeinerung der Breit-Wigner-Formel führen. Der erste Abschnitt 6.1 dient im wesentlichen zur Erläuterung der Notation und zur Rechtfertigung des in Abschnitt 6.2 verwendeten Ansatzes mit Hilfe einer konventionellen Rechnung in zweiter Ordnung Störungstheorie. Bei der Ableitung gehen wir von spinlosen Kernen und einem quantisierten elektromagnetischen Feld aus. Die Quantisierung des Feldes ist nicht notwendig, da Absorptionsprozesse auch semiklassisch (quantisierte Materie, klassische Felder) und elektromagnetische Zerfallsprozesse phänomenologisch mit Hilfe des Einstein-A-Koeffizienten beschrieben werden können. Bei den hier durchzuführenden Drei-Niveau-Rechnungen ist es jedoch bequemer und anschaulicher, von quantisierten Feldern auszugehen.

Durch die Ein-Photon-Absorption durch den Kern können im Prinzip alle radioaktiven Zerfälle beeinflusst werden (während die Diskussion in Kap. III - V auf Zerfallsprozesse beschränkt war, bei denen geladene Teilchen emittiert werden). Wir werden speziell den Gammazerfall, den Betazerfall und den Elektroneneinfang im äußeren Feld untersuchen. Die Rechnungen zum Gammazerfall erlauben einen Vergleich mit den Ergebnissen von Arad et al. [22], in denen eine große Verstärkung des Zerfalls isomerer Kernzustände bereits

mit Laserfeldern behauptet wurde. Die Behandlung des Elektroneneinfangs eröffnet eine interessante Möglichkeit, die Ruhemasse des Neutrinos zu bestimmen.

Für den Spezialfall des photoinduzierten Gammazerfalls unter Aussendung elektrischer Dipolstrahlung sind unsere Rechnungen sehr ähnlich zur Theorie der Raman-Streuung in der Atom- und Molekülphysik, die beispielsweise in dem Lehrbuch von Loudon [26] abgeleitet wird. Für grundlegende Formeln und detaillierte Begründungen verweisen wir daher auf dieses Buch.

6.1 Zweite Ordnung Störungstheorie

Zur Beschreibung eines radioaktiven Zerfallsprozesses, der unter Absorption eines Photons stattfindet, gehen wir von dem in Abb. 7a dargestellten Niveauschema aus. Der radioaktive Kern befindet sich ursprünglich in dem Zustand $|i\rangle$. Beim Betazerfall oder Elektroneneinfang ist dies der Grundzustand (evtl. auch ein angeregter Zustand) des Ausgangskerns (Z,N) . Beim Gammazerfall bezeichnet $|i\rangle$ einen isomeren Zustand des Kerns (Z,N) . Ohne äußeres Feld zerfällt $|i\rangle$ in den Endzustand $|f\rangle$. Beim Betazerfall oder beim Elektroneneinfang bezeichnet $|f\rangle$ ein Niveau im Nachbarkern $(Z\pm 1, N\mp 1)$, beim Gammazerfall den Grundzustand oder ein tiefliegendes angeregtes Niveau im Kern (Z,N) . Falls der Übergang $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ aufgrund von Auswahlregeln stark unterdrückt ist, hat der Zustand $|i\rangle$ eine sehr große Lebensdauer. Bei Anwesenheit des äußeren Feldes kann der Kern durch Absorption eines Photons der Energie $\hbar\omega$ in einen virtuellen Zwischenzustand $|n\rangle$ übergehen und von dort in den Endzustand $|f\rangle$ zerfallen. Wir lassen vorerst beliebige Verstimmung zwischen der Photonenenergie $\hbar\omega$ und dem Energieabstand der Niveaus $|i\rangle$ und $|n\rangle$ zu. Dieser Zwei-Stufen-Prozeß findet dann mit großer Rate statt, wenn der Zwischenzustand in der Nähe eines reellen angeregten Niveaus $|n\rangle$ des Kerns (Z,N) liegt. Der Übergang $|n\rangle \rightarrow |f\rangle$ kann andere Auswahlregeln als der Übergang $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ haben. Falls beispielsweise $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ verboten, $|n\rangle \rightarrow |f\rangle$ aber erlaubt ist, können die Zwei-Stufen-Prozesse $|i\rangle \rightarrow |n\rangle \rightarrow |f\rangle$ u. U. mit größerer Rate stattfinden als der direkte Zerfall $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$. Außerdem ist der Phasenraum für den Zerfall $|n\rangle \rightarrow |f\rangle$ größer als für $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$. Für Gammazerfall entspricht der in Abb. 7 a dargestellte Zwei-Stufen-Prozeß der aus der Atom- und Molekülphysik bekannten anti-Stokes Raman-Streuung.

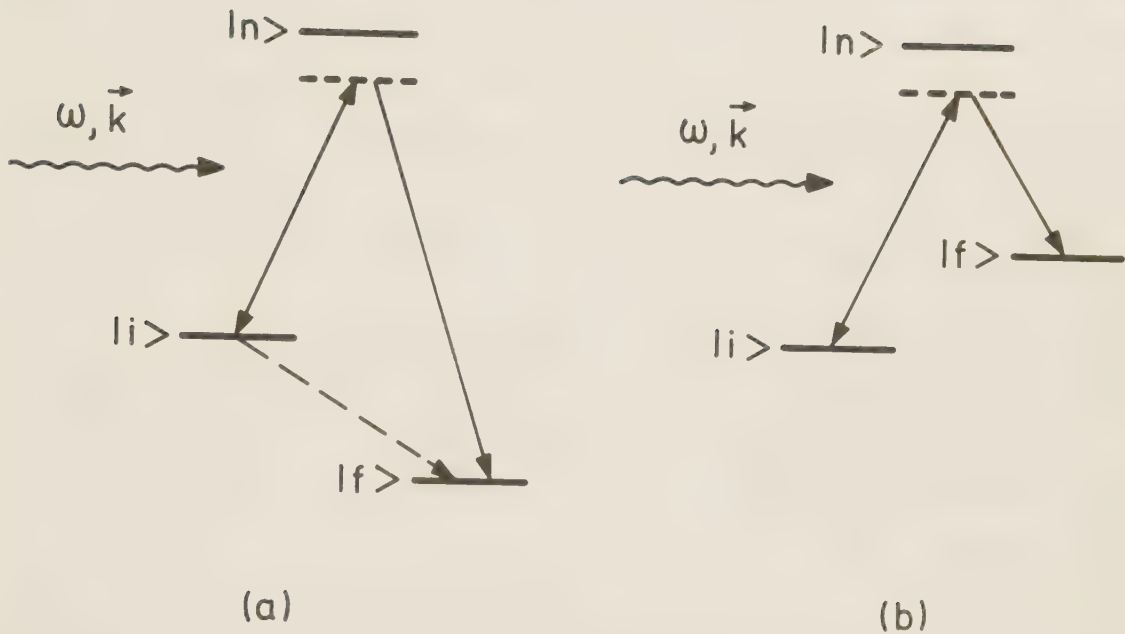


Abb. 7: Energiediagramm eines nuklearen Drei-Niveau-Systems. Der Übergang $|i\rangle \rightarrow |n\rangle$ wird durch das äußere Feld induziert. (a) Ein- und Zwei-Stufen-Zerfall eines Niveaus $|i\rangle$; (b) Induzierter Zerfall eines stabilen Niveaus $|i\rangle$.

Mit diesen Zwei-Stufen-Prozessen kann auch der Zerfall natürlich stabiler Kerne induziert werden. Abb. 7 b zeigt das entsprechende Niveauschema, das für Gammazerfall der Stokes-Raman-Streuung entspricht. Nun bezeichnet $|i\rangle$ den stabilen Grundzustand des Kerns (Z, N) . Der Endzustand $|f\rangle$ kann nur durch Absorption von Energie aus dem äußeren Feld erreicht werden. Bei Betazerfall und Elektroneneinfang bezeichnet $|f\rangle$ einen Zustand im Nachbarkern $(Z \pm 1, N \mp 1)$, bei Gammazerfall einen isomeren Zustand im Kern (Z, N) .

Der Elektroneneinfang $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$ stellt einen Sonderfall unter den möglichen Zerfallsprozessen dar. Da am Elektroneneinfang die gebundenen nuklearen und elektronischen Zustände im Eingangszustand beteiligt sind, kann das Photon sowohl vom Kern als auch von der Atomhülle absorbiert werden.

Diese zweite Möglichkeit wird in Abschnitt 6.5 bei einem Vorschlag zur Bestimmung der Neutrinomasse eine entscheidende Rolle spielen. Das eingefangene Elektron ist in der Regel ein S-Elektron aus einer der inneren Schalen, also der K-, evtl. auch der L- oder M-Schale. Die höherliegenden Zustände sind alle mit Elektronen aufgefüllt. Falls das Photon also in der Atomhülle absorbiert wird, kann der in Abb. 7 skizzierte Zwei-Stufen-Prozeß aufgrund des Pauli-Prinzips folgendermaßen aufgefaßt werden: da Niveau $|n\rangle$ bereits im Anfangszustand mit einem Elektron besetzt ist, wird zuerst dieses Elektron aus Zustand $|n\rangle$ durch die schwache Wechselwirkung absorbiert und dann das Elektron aus Zustand $|i\rangle$ durch Absorption eines Photons in den Zustand $|n\rangle$ angeregt.

Die Besetzungswahrscheinlichkeit der einzelnen Niveaus $|\alpha\rangle$ wird aus der zeitabhängigen Störungstheorie zweiter Ordnung gewonnen. Die Bewegungsgleichungen für die Wahrscheinlichkeitsamplituden a_i , a_n und a_f (2.27) lauten im Wechselwirkungsbild

$$\begin{aligned}\dot{a}_i &= 0 \\ \dot{a}_n &= -\frac{i}{\hbar} \langle n | V+W | i \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(E_i-E_n)t} a_i \\ \dot{a}_f &= -\frac{i}{\hbar} \sum_n \langle f | V+W | n \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_f)t} a_n.\end{aligned}\tag{6.1}$$

In Gl. (6.1) bezeichnen $|i\rangle$, $|n\rangle$ und $|f\rangle$ nicht die reinen Kernzustände, sondern sie sind Eigenzustände des Gesamtsystems, enthalten also auch die Photonenzustände und bei Beta-Übergängen die Zustände der emittierten Teilchen. Entsprechend stehen E_i , E_n und E_f nicht für die Kernenergien, sondern für die Energie aller beteiligten Teilchen in den jeweiligen Zuständen. Wir werden dies später für die verschiedenen Zerfallsprozesse spezifizieren. Die Wechselwirkung, die zu den beiden Übergängen $|i\rangle \rightarrow |n\rangle$ und $|n\rangle \rightarrow |f\rangle$ führt, ist mit $V + W$ bezeichnet. Hierbei soll V die Wechselwirkung mit dem äußeren Feld beschreiben, W den spontanen Zerfallsprozeß. Damit ist V der wohlbekannte Wechselwirkungsoperator zwischen elektromagnetischem Feld und Kern, der nach den verschiedenen Ordnungen von Multipolstrahlung entwickelt werden kann [125,126], während W je nach Zerfallsprozeß die schwache Wechselwirkung (3.1) (bei Betazerfall und Elektroneneinfang) oder ebenfalls den elektromagnetischen Wechselwirkungsoperator (bei Gammazerfall) bezeichnet. In Gl. (6.1) wurde durch die Summation über n weiterhin berücksichtigt, daß

wir kein reines Drei-Niveau-System haben, sondern daß alle Zustände $|n\rangle$ des Kerns als Zwischenzustände berücksichtigt werden müssen.

Zur Zeit $t = 0$ soll sich das System im Ausgangszustand $|i\rangle$ befinden. Unter dieser Anfangsbedingung $a_n(0) = \delta_{ni}$ läßt sich das Gleichungssystem (6.1) leicht lösen. Wir erhalten als Rate für Zerfälle in den Zustand $|f\rangle$

$$W_{if} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|a_f(T)|^2}{T} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | V+W | i \rangle + \sum_n \frac{\langle f | V+W | n \rangle \langle n | V+W | i \rangle}{E_i - E_n} \right|^2 \delta(E_i - E_f). \quad (6.2)$$

Soweit ist die Beschreibung des photoinduzierten Zerfalls radioaktiver Kerne exakt: Gl. (6.2) gilt für Felder beliebiger Wellenlänge. Sie beschreibt sowohl die Absorption von Photonen aus dem äußeren Feld als auch die Emission von Photonen in das Feld aufgrund des Wechselwirkungsoperators V und enthält sowohl Prozesse, bei denen zuerst die Wechselwirkung mit dem Feld und dann der Kernzerfall aufgrund von W stattfindet als auch Prozesse umgekehrter Reihenfolge. Für die weiteren Rechnungen in diesem Kapitel wollen wir jedoch eine wichtige Näherung einführen: wir nehmen an, daß die Photonenenergie $\hbar\omega$ fast resonant mit der Übergangsenergie zwischen zwei Zuständen $|i\rangle$ und $|n'\rangle$ ist, so daß $E_i - E_{n'} \approx 0$ wird und dieser eine Term n' in der Summe über n in Gl. (6.2) dominiert. Die restlichen Terme in Gl. (6.2) können dann vernachlässigt werden. Diese Reduktion auf ein 3-Niveau-System, wie es in Abb. 7 dargestellt ist, impliziert drei Näherungen: (i) die Resonanznäherung ("rotating wave approximation"), wonach nur die Photonenabsorption aus dem Feld betrachtet wird, während die Photonenemission in das Feld vernachlässigt wird; (ii) die Vernachlässigung von Zwei-Stufen-Prozessen, bei denen der erste Übergang durch die Wechselwirkung W induziert wird und die Photonenabsorption erst im Endzustand stattfindet; und (iii) die Vernachlässigung aller weiteren gebundenen Zustände $|n\rangle$, die durch die Photonenabsorption ebenfalls als Zwischenzustände angeregt werden können. Mit diesen drei Näherungen vereinfachen sich die folgenden Rechnungen stark, doch sind sie andererseits nur noch für die quasiresonante Anregung korrekt. Trotzdem werden wir sie in den folgenden Abschnitten auch auf die nichtresonante Anregung anwenden, um die Größenordnung der auftretenden Effekte abzuschätzen.

Als weitere Näherung wollen wir in Gl. (6.2) den direkten Zerfallsprozeß, beschrieben durch das Matrixelement $\langle f | W | i \rangle$, vernachlässigen, da wir nur an Fällen interessiert sind, bei denen die Prozesse erster und zweiter Ordnung auf verschiedenen Zeitskalen ablaufen, so daß Interferenzeffekte keine Rolle spielen. Weiterhin wollen wir die in Gl. (6.2) auftretenden Gesamtenergien $E_\alpha - E_\beta$ aufschlüsseln nach den Übergangsenergien $\Delta E_{\alpha\beta} \equiv E_\alpha^* - E_\beta^*$ des gebundenen Systems (E_α^* bezeichnet die Anregungsenergie des gebundenen Systems im Zustand $|\alpha\rangle$) sowie den Energien $\hbar\omega$ für das absorbierte Photon und E_s für das emittierte Photon bzw. für die emittierten Teilchen. Die Übergangsenergien $\Delta E_{\alpha\beta}$ des gebundenen Systems sowie die gesamte emittierte Energie E_s werden in Anschluß an Gl. (6.3) für die verschiedenen Zerfallsprozesse getrennt bestimmt. Dann können wir Gl. (6.2) für den in Abb. 7 dargestellten Zwei-Stufen-Prozeß $|i\rangle \rightarrow |n\rangle \rightarrow |f\rangle$ schreiben als

$$W_{if}^{(2)} \approx \frac{2\pi}{\hbar} \frac{|\langle f | W(E_s) | n \rangle|^2 |\langle n | V(\hbar\omega) | i \rangle|^2}{(\Delta E_{in} - \hbar\omega)^2} \delta(\Delta E_{if} + \hbar\omega - E_s). \quad (6.3)$$

Durch die Schreibweise $V(\hbar\omega)$ und $W(E_s)$ in Gl. (6.3) wird angedeutet, daß die Übergangsmatrixelemente von V und W von der Energie des absorbierten Photons bzw. der emittierten Teilchen abhängen können. Für elektromagnetische Übergänge ist dies wohlbekannt: beispielsweise enthält der Operator für elektrische Dipolstrahlung eine Summe über alle Moden des Feldes, deren einzelnen Terme proportional zu $\sqrt{\hbar\omega}$ sind [26]. Für einen elektromagnetischen Übergang der Polarität ℓ hängt das Matrixelement in der Näherung großer Wellenlängen in der Form

$$|\langle \beta | V(\hbar\omega) | \alpha \rangle|^2 \propto (\hbar\omega)^{2\ell-1} \quad (6.4)$$

von der Photonenenergie ab [86]. Bei erlaubten Betaübergängen ist das Matrixelement energieunabhängig, bei verbotenen Übergängen tritt jedoch wieder die Energie der emittierten Teilchen auf. Diese Energieabhängigkeit wird in diesem Kapitel eine wichtige Rolle spielen.

Im folgenden sollen die Zustände $|\alpha\rangle$, die Niveauabstände $\Delta E_{\alpha\beta}$ zwischen den verschiedenen gebundenen Zuständen und die Energie E_s der emittierten Teilchen für die drei betrachteten Zerfallsmoden spezifiziert werden. Beim

Gammazerfall sind drei Teilchen an dem Zwei-Stufen-Prozeß beteiligt: der Kern, das absorbierte und das emittierte Photon. Wir bezeichnen die Zustände daher mit

$$|\alpha\rangle = |E_\alpha(Z,N), n(\vec{k}), n(\vec{k}_s)\rangle.$$

Hierbei bezeichnet $E_\alpha(Z,N)$ die Anregungsenergie des Kerns (Z,N) , $n(\vec{k})$ die Anzahl der Photonen in dem eingestrahlten Feld, dessen Wellenvektor durch $\vec{k}$ gegeben ist, und $n(\vec{k}_s)$ die Anzahl der emittierten Photonen in der Mode $\vec{k}_s$. Damit haben die in Gl. (6.3) auftretenden Zustände beim Gammazerfall die explizite Gestalt

$$|\hat{i}\rangle = |E_i(Z,N), n, 0\rangle, \quad |u\rangle = |E_u(Z,N), n-1, 0\rangle, \quad |f\rangle = |E_f(Z,N), n-1, 1\rangle.$$

Für den nuklearen Niveauabstand $\Delta E_{\alpha\beta}$ und die Energie E_s des emittierten Teilchens ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta E_{ui} &= E_u(Z,N) - E_i(Z,N), \\ \Delta E_{if} &= E_i(Z,N) - E_f(Z,N), \\ E_s &= \hbar \omega_s. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Beim Betazerfall unter Elektronen- oder Positronen-Emission sind vier Teilchen am Zwei-Stufen-Prozeß beteiligt:

$$|\alpha\rangle = |E_\alpha(Z,N), n(\vec{k}), n(\vec{k}_e), n(\vec{k}_\nu)\rangle.$$

Hierbei bezeichnen $n(\vec{k}_e)$ und $n(\vec{k}_\nu)$ die Zahl der Elektronen/Positronen und Antineutrinos/Neutrinos mit Wellenvektor $\vec{k}_e$ bzw. $\vec{k}_\nu$. Die Zustände in Gl. (6.3) haben damit die Gestalt

$$|\hat{i}\rangle = |E_i(Z,N), n, 0, 0\rangle, \quad |u\rangle = |E_u(Z,N), n-1, 0, 0\rangle, \quad |f\rangle = |E_f(Z\pm 1, N\pm 1), n-1, 1, 1\rangle.$$

Die Energie von Elektron und Neutrino soll mit E_e bzw. E_ν bezeichnet werden, wobei für E_e die relativistische Energie inklusive der Ruhemasse ein-

zusetzen ist. Bei den Energieabständen sind nun auch die nuklearen Massen $M(Z, N)$ der verschiedenen Kerne zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned}\Delta E_{ni} &= E_n(Z, N) - E_i(Z, N) , \\ \Delta E_{if} &= M(Z, N)c^2 + E_i(Z, N) - M(Z \pm 1, N \mp 1)c^2 - E_f(Z \pm 1, N \mp 1) , \quad (6.6) \\ E_s &= E_e + E_\gamma .\end{aligned}$$

Beim Elektroneneinfang sind wie beim Betazerfall vier Teilchen beteiligt. Das Elektron wird jedoch nicht als freies Teilchen emittiert, sondern ist im Anfangszustand an den Kern (Z, N) gebunden. Wir führen daher die Gesamtenergie $E_\alpha(Z, N; Z_e)$ ein, die sich aus der Anregungsenergie der Atomhülle und des Kerns zusammensetzt:

$$|\alpha\rangle = |E_\alpha(Z, N; Z_e), n(\vec{k}), n(\vec{k}_\gamma)\rangle .$$

Die einzelnen Zustände in Gl. (6.3) können dann geschrieben werden als

$$|i\rangle = |E_i(Z, N; Z_e), n, 0\rangle , |u\rangle = |E_u(Z, N; Z_e), n-1, 0\rangle , |f\rangle = |E_f(Z-1, N+1, (Z-1)e), n-1\rangle ,$$

Die Übergangsrate für Elektroneneinfang ist am größten für die Absorption eines Elektrons aus der innersten Schale. Die Atomhülle ist also im Endzustand $|f\rangle$ hoch angeregt. (Hierin unterscheidet sich der Elektroneneinfang vom Gamma- und Betazerfall, bei denen sich das gebundene System im Endzustand $|f\rangle$ meist im Grundzustand befindet.) Da sich beim Elektroneneinfang die Massen des Kerns und der Hülle ändern, sind bei den Energien der verschiedenen Zustände jetzt die atomaren Massen $M(Z, N; Z_e)$ zu berücksichtigen. Dann sind die Niveauabstände $\Delta E_{\alpha\beta}$ und die freiwerdende Energie E_s gegeben durch

$$\begin{aligned}\Delta E_{ni} &= E_n(Z, N; Z_e) - E_i(Z, N; Z_e) , \\ \Delta E_{if} &= M(Z, N; Z_e)c^2 + E_i(Z, N; Z_e) - M(Z-1, N+1, (Z-1)e)c^2 - E_f(Z-1, N+1, (Z-1)e) \\ E_s &= E_\gamma .\end{aligned}\quad (6.7)$$

Um die totale Übergangsrate zu erhalten, muß über alle möglichen Zustände der emittierten Teilchen integriert werden. Dies führt dazu, daß die δ -Funktion in Gl. (6.3) bei Emission von n Teilchen ersetzt wird durch einen Phasenraumfaktor der Gestalt (für $n > 1$ wird angenommen, daß die Matrixelemente energieunabhängig sind)

$$f(\Delta E_{if} + \hbar\omega) = \int \frac{d^3 p_s^{(1)}}{(2\pi\hbar)^3} \dots \frac{d^3 p_s^{(n)}}{(2\pi\hbar)^3} \delta(\Delta E_{if} + \hbar\omega - E_s^{(1)} - \dots - E_s^{(n)}) \quad (6.8)$$

Bei Photonenemission ist weiterhin über die beiden Polarisierungen des Photons zu summieren. Dann hat die totale Übergangsrate die Gestalt

$$\Gamma_{if}^{(2)} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{| \langle f | W(\Delta E_{if} + \hbar\omega) | n \rangle |^2 | \langle n | V(\hbar\omega) | i \rangle |^2}{(\Delta E_{ni} - \hbar\omega)^2} f(\Delta E_{if} + \hbar\omega) \quad (6.9)$$

Der Phasenraumfaktor f muß für jeden Zerfallsprozeß getrennt berechnet werden. Wir werden darauf in den folgenden Abschnitten zurückkommen. Aus Gl. (6.9) ist ersichtlich, daß die Rate für Zwei-Stufen-Prozesse dann groß wird, wenn $\hbar\omega$ mit ΔE_{ni} übereinstimmt. Außerdem wächst $\Gamma_{if}^{(2)}$ mit der Photonenenergie $\hbar\omega$ an, da mit größerem $\hbar\omega$ auch ein größerer Phasenraum für den Zerfall zur Verfügung steht.

Wir wollen Gl. (6.9) noch in zwei alternativen Formen schreiben. Ziel ist es, die in Gl. (6.9) auftretenden Matrixelemente mit den experimentell zugänglichen Lebensdauern des Niveaus $|n\rangle$ für spontanen Zerfall in die Zustände $|i\rangle$ und $|f\rangle$ in Verbindung zu bringen. Bei elektromagnetischen Übergängen ist zu beachten, daß das Matrixelement von der Energie des absorbierten oder emittierten Photons abhängt. Bei nichtresonanter Absorption ist es also verschieden von dem Matrixelement, das den natürlichen, spontanen Zerfall des Niveaus $|n\rangle$ bestimmt. Wir wollen daher am Beispiel der elektrischen Dipolstrahlung vorführen, wie das in Gl. (6.9) auftretende Matrixelement $\langle n | V(\hbar\omega) | i \rangle$ aufgespalten werden kann in einen Anteil, der nur von dem äußeren Feld abhängt, und einen Anteil, in den nur die Kernstruktur eingeht. Dieser reine Kernanteil wird dann mit der natürlichen Lebensdauer in Verbindung gebracht. Anschließend wird das Ergebnis auf Multipolstrahlung beliebiger Ordnung verallgemeinert, da die Annahme von E1-Übergängen im Kern nicht sehr realistisch ist. Fast alle E1-Übergänge mit niedriger Energie haben eine sehr geringe Rate, da die E1-Übergangsstärke in der Riesenresonanz konzentriert ist. Entsprechend wird auch ein äußeres Feld nur schwach an E1-Übergänge koppeln.

Für elektrische Dipolübergänge hat der Wechselwirkungsoperator die Gestalt [26]:

$$V = i\hbar \sum_{\vec{k}, \sigma} \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta}(\vec{k}, \sigma) (\hat{a}(\vec{k}, \sigma) - \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \sigma)) |E_\alpha(Z, N)\rangle \langle E_\beta(Z, N)|. \quad (6.10)$$

Hierbei sind $\hat{a}(\vec{k}, \sigma)$ und $\hat{a}^\dagger(\vec{k}, \sigma)$ Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren für Photonen mit Wellenvektor $\vec{k}$ und Polarisation σ , die Zustände $|E_\alpha(Z, N)\rangle$ bezeichnen Eigenzustände des Kerns (Z, N) mit Anregungsenergie E_α . Die Kopplungsstärke $g_{\alpha\beta}(\vec{k}, \sigma)$ für den Übergang $|\alpha\rangle \leftrightarrow |\beta\rangle$ unter Absorption oder Emission eines Photons $(\vec{k}, \sigma)$ ist gegeben durch

$$\hbar g_{\alpha\beta}(\vec{k}, \sigma) = e \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2 \epsilon_0 V}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}} \vec{D}_{\alpha\beta}. \quad (6.11)$$

Die Kopplungsstärke zerfällt in einen feldabhängigen Faktor, in den die Frequenz $\omega_{\vec{k}}$ und der Einheits-Polarisationsvektor $\hat{\epsilon}_{\vec{k}}$ des Photons $(\vec{k}, \sigma)$ sowie das Quantisierungsvolumen V eingehen, und einen kernabhängigen Faktor, der durch das Dipolmoment des Übergangs gegeben ist:

$$e \vec{D}_{\alpha\beta} = e \langle E_\alpha(Z, N) | \sum_i \vec{r}_i | E_\beta(Z, N) \rangle.$$

Das in der Rate (6.9) auftretende Matrixelement $\langle n | V | i \rangle$ für die Absorption eines Photons kann für die Wechselwirkung (6.10) leicht berechnet werden. Nach Mittelung über die Orientierung von $\vec{D}_{ni}$ erhalten wir

$$|\langle E_n(Z, N), n-1, 0 | V(t\omega) | E_i(Z, N), n, 0 \rangle|^2 = \frac{e^2 I}{6 \epsilon_0 c} |\vec{D}_{ni}|^2. \quad (6.12)$$

Hierbei wurde die Intensität I der einfallenden Photonen eingeführt, die mit der Photonenzahl n über $I = c\hbar\omega n/V$ verknüpft ist. Das Dipol-Matrixelement $|\vec{D}_{ni}|^2$ kann nun ersetzt werden durch die Lebensdauer des Niveaus $|n\rangle$ bzgl. spontanem elektromagnetischem Zerfall in den Zustand $|i\rangle$. Man erhält diese natürliche Lebensdauer τ_{ni} aus der ersten Ordnung Störungstheorie, d. h. aus Fermi's Goldener Regel:

$$\frac{1}{\tau_{ni}} = \Gamma_{ni}^{(0)} = (1 + \alpha_{ni}) \frac{e^2}{3\pi \epsilon_0 c^3 \hbar^4} |\vec{D}_{ni}|^2 \Delta E_{ni}^3. \quad (6.13)$$

Bis auf den Faktor $(1+\alpha)$ ist dieser Ausdruck identisch mit dem Einstein-A-Koeffizienten für Dipolstrahlung. Die Korrekturgröße α_{ni} ist der Konversionskoeffizient für den Übergang $|n\rangle \rightarrow |i\rangle$, da $|n\rangle$ nicht nur unter Aussendung eines Photons elektromagnetisch nach $|i\rangle$ zerfallen kann, sondern auch strahlungslos durch innere Konversion. Mit Hilfe von Gl. (6.13) kann Gl. (6.12) geschrieben werden als

$$|\langle n|V(\hbar\omega)|i\rangle|^2 = \frac{1}{1+\alpha_{ni}} \frac{\pi c^2 \hbar^4}{2} I \frac{\Gamma_{ni}^{(0)}}{\Delta E_{ni}^3} . \quad (6.14)$$

Aufgrund von Gl. (6.4) lautet bei einem stimulierten Übergang beliebiger Multipolarität ℓ_{ni} der Zusammenhang zwischen dem Matrixelement und der natürlichen Lebensdauer

$$|\langle n|V(\hbar\omega)|i\rangle|^2 = \frac{1}{1+\alpha_{ni}} \frac{\pi c^2 \hbar}{2} \frac{I}{\omega^3} \left(\frac{\hbar\omega}{\Delta E_{ni}} \right)^{2\ell_{ni}+1} \Gamma_{ni}^{(0)} . \quad (6.15)$$

Weiterhin wollen wir die natürliche Zerfallsrate $\Gamma_{nf}^{(0)}$ für spontanen Zerfall von $|n\rangle$ nach $|f\rangle$ einführen, die sich aus Fermi's Goldener Regel ergibt zu:

$$\Gamma_{nf}^{(0)} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|W(\Delta E_{nf})|n\rangle|^2 \rho(\Delta E_{nf}) . \quad (6.16)$$

Mittels Gl. (6.15) und (6.16) können wir die Rate $\Gamma_{if}^{(2)}$ (6.9) für Zweistufen-Prozesse durch die natürlichen Zerfallsraten $\Gamma_{ni}^{(0)}$ und $\Gamma_{nf}^{(0)}$ ausdrücken:

$$\Gamma_{if}^{(2)} = \frac{1}{1+\alpha_{ni}} \frac{\pi c^2 \hbar}{2} \frac{I}{\omega^3} \left(\frac{\hbar\omega}{\Delta E_{ni}} \right)^{2\ell_{ni}+1} \frac{|\langle f|W(\Delta E_{if}+\hbar\omega)|n\rangle|^2}{|\langle f|W(\Delta E_{nf})|n\rangle|^2} \frac{\rho(\Delta E_{if}+\hbar\omega)}{\rho(\Delta E_{nf})} \frac{\Gamma_{ni}^{(0)} \Gamma_{nf}^{(0)}}{(\Delta E_{ni}-\hbar\omega)^2} . \quad (6.17)$$

Für den Vergleich mit dem nächsten Abschnitt wollen wir noch eine energieabhängige Zerfallsrate $\Gamma_{\alpha\beta}(E)$ definieren. Wenn bei dem spontanen Zerfall eines Niveaus $|\alpha\rangle$ nicht die Energie $\Delta E_{\alpha\beta}$ freigesetzt wird, sondern eine beliebige Energie E , ist die zugehörige Rate $\Gamma_{\alpha\beta}(E)$ bei einem elektromagnetischen Übergang der Polarität $\ell_{\alpha\beta}$ mit der natürlichen Rate $\Gamma_{\alpha\beta}^{(0)}$ verknüpft über [125]

$$\Gamma_{\alpha\beta}(E) = \frac{1}{1 + \alpha_{\alpha\beta}} \left(\frac{E}{\Delta E_{\alpha\beta}} \right)^{2\ell_{\alpha\beta} + 1} \Gamma_{\alpha\beta}^{(0)}, \quad (6.18)$$

bei einem beliebigen Zerfallsprozeß über

$$\Gamma_{\alpha\beta}(E) = \frac{|\langle \beta | W(E) | \alpha \rangle|^2}{|\langle \beta | W(\Delta E_{\alpha\beta}) | \alpha \rangle|^2} \frac{\mathcal{I}(E)}{\mathcal{I}(\Delta E_{\alpha\beta})} \Gamma_{\alpha\beta}^{(0)}. \quad (6.19)$$

Damit können wir $\Gamma_{if}^{(2)}$ auch ausdrücken durch die Zerfallsraten $\Gamma_{ni}(\hbar\omega)$ und $\Gamma_{nf}(\Delta E_{if} + \hbar\omega)$ eines Zwischenniveaus $|n\rangle$, das nicht bei der Energie $E_n(Z, N)$, sondern bei $E_i(Z, N) + \hbar\omega$ angesiedelt ist:

$$\Gamma_{if}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{4\pi^2 \hbar}{\omega^3} \frac{\Gamma_{ni}(\hbar\omega) \Gamma_{nf}(\Delta E_{if} + \hbar\omega)}{(\Delta E_{ni} - \hbar\omega)^2}. \quad (6.20)$$

Der Unterschied zwischen $\Gamma_{\alpha\beta}(E)$ und $\Gamma_{\alpha\beta}^{(0)}$ ist vernachlässigbar in der Nähe der Resonanz $E \approx \Delta E_{\alpha\beta}$, weit entfernt von der Resonanzbedingung ist er jedoch von entscheidender Bedeutung.

6.2 Zerfallsdämpfung, Breit-Wigner-Wirkungsquerschnitt

Die totale Übergangsrate (6.9) für den Zwei-Stufen-Prozeß divergiert, falls die Photonenenergie $\hbar\omega$ exakt in Resonanz mit der nuklearen Übergangsenergie ΔE_{ni} ist. Um die bekannte Lorentzform für die Verteilung der Übergangsrate bzgl. der Photonenenergie zu erhalten, müssen die spontanen Zerfälle des Niveaus $|n\rangle$ in alle Endzustände berücksichtigt werden. Wir werden daher in diesem Abschnitt eine andere Ableitung von $\Gamma_{if}^{(2)}$ wählen, bei der die Strahlungsdämpfung phänomenologisch beschrieben wird [26]. Das Ergebnis wird den direkten Vergleich mit der Breit-Wigner-Formel ermöglichen [124]. Die Rechnungen werden auch die zeitliche Entwicklung der Übergangswahrscheinlichkeit für den Zwei-Stufen-Prozeß liefern.

Wir gehen dazu von einer anderen physikalischen Interpretation des Zwei-Stufen-Prozesses aus, als es in der Störungstheorie üblich ist. In der Störungstheorie nimmt man an, daß das System im ersten Schritt durch Absorption eines Photons in einen (virtuellen) Zwischenzustand übergeht, der möglichst nahe bei einem reellen Zustand $|n\rangle$ liegen soll, um eine große Übergangsrate zu erzielen. Jetzt wollen wir Abb. 7 so interpretieren, daß durch Absorption eines Photons das System in einen (reellen) Zustand $|n\rangle$ der Energie $E_i(Z,N) + \hbar\omega$ übergeht, von wo aus es in den Endzustand $|f\rangle$ zerfällt. Die Zerfallskonstanten des Zwischenzustandes $|n\rangle$ sind dann nicht mehr durch die natürlichen Zerfallsraten $\Gamma_{ni}^{(0)}$ und $\Gamma_{nf}^{(0)}$, sondern durch die energieabhängigen Raten $\Gamma_{ni}(\hbar\omega)$ und $\Gamma_{nf}(\Delta E_{if} + \hbar\omega)$ (Gl. (6.18) und (6.19)) gegeben, die bereits in Gl. (6.20) eingeführt wurden. Dieser Ansatz ist gerechtfertigt durch die Rechnungen des letzten Abschnittes, da wir im folgenden die Ergebnisse des letzten Abschnittes reproduzieren und verallgemeinern werden.

In den Bewegungsgleichungen für die Niveaus $|i\rangle$ und $|n\rangle$ wird nun der spontane Zerfall durch die phänomenologische Einführung von Zerfallskonstanten berücksichtigt [26]:

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= -\frac{1}{2} \Gamma_i a_i, \\ \dot{a}_n &= -\frac{1}{2} \Gamma_n a_n - \frac{i}{\hbar} \langle n|V|i\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(E_i - E_n)t} a_i. \end{aligned} \quad (6.21)$$

$\Gamma_\alpha = \sum_{\beta < \alpha} \Gamma_{\alpha\beta}$ bezeichnet die Gesamtrate der spontanen Zerfälle des Niveaus $|\alpha\rangle$ in alle energetisch erlaubten Endzustände $|\beta\rangle$. Die Beschreibung der Zerfallsprozesse durch Gl. (6.21) unterscheidet sich wesentlich von Gl. (6.1): der spontane Zerfall $|n\rangle \rightarrow |f\rangle$ aufgrund von W ist jetzt phänomenologisch in der Zerfallskonstanten Γ_n berücksichtigt, so daß wir keine Drei-Niveau-Rechnung ausführen müssen wie in Abschnitt 6.1, sondern uns auf zwei Niveaus beschränken können. Außerdem werden wir nun eine zeitabhängige Besetzungswahrscheinlichkeit im angeregten Niveau $|n\rangle$ erhalten, die im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ verschwindet, während die konventionelle Störungstheorie in Abschnitt 6.1 im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ eine δ -Funktion liefert, die die Energieerhaltung gewährleistet.

Die Rate für den Zwei-Stufen-Prozeß $|i\rangle \rightarrow |n\rangle \rightarrow |f\rangle$ ist durch das Produkt aus der Besetzungswahrscheinlichkeit $|a_n(t)|^2$, das System in dem Zustand $|n\rangle$ zu finden, und der Rate $\Gamma_{nf}(\Delta E_{if} + \hbar\omega)$ für den Zerfall des Zustandes $|n\rangle$ in den Endzustand $|f\rangle$ gegeben. Diese Rate ist zeitabhängig und zerfällt exponentiell aufgrund der spontanen Zerfälle

$$\begin{aligned} \Gamma_{if}^{(2)}(t) &= \Gamma_{nf}(\Delta E_{if} + \hbar\omega) |a_n(t)|^2 \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \Gamma_{nf}(\Delta E_{if} + \hbar\omega) |\langle n|V|i\rangle|^2 \frac{e^{-\Gamma_i t} + e^{-\Gamma_n t} - 2e^{-\gamma t} \cos \Delta t}{\Delta^2 + \delta^2}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Zur Abkürzung wurden hier die mittlere Zerfallskonstante γ , die Differenz der Zerfallskonstanten δ und die Verstimmung des äußeren Feldes Δ eingeführt:

$$\gamma = \frac{\Gamma_i + \Gamma_n}{2}, \quad \delta = \frac{\Gamma_i - \Gamma_n}{2}, \quad \hbar \Delta = \Delta E_{ni} - \hbar\omega. \quad (6.23)$$

Die totale Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Zwei-Stufen-Prozesses zwischen dem Einschalten des Feldes zur Zeit $t = 0$ und der Zeit T ergibt sich aus Gl. (6.22) zu

$$\begin{aligned} P_{if}^{(2)}(T) &= \Gamma_{nf}(\Delta E_{if} + \hbar\omega) \int_0^T dt |a_n(t)|^2 \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \Gamma_{nf}(\Delta E_{if} + \hbar\omega) \frac{|\langle n|V|i\rangle|^2}{\Delta^2 + \delta^2} \left\{ \frac{1 - e^{-\Gamma_i T}}{\Gamma_i} + \frac{1 - e^{-\Gamma_n T}}{\Gamma_n} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\gamma - e^{-\gamma T} (\gamma \cos \Delta T - \Delta \sin \Delta T)}{\Delta^2 + \gamma^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Wir sind hier vor allem an dem Fall interessiert, daß der Zwischenzustand $|n\rangle$ wesentlich schneller zerfällt als der Ausgangszustand $|i\rangle$, d. h.

$\Gamma_n \gg \Gamma_i$. Damit reduzieren sich γ und δ zu $\gamma \cong -\delta \cong \Gamma_n/2$. Für Zeiten, die groß sind gegen die Lebensdauer von $|n\rangle$ ($t \gg \Gamma_n^{-1}$), aber klein gegen die Lebensdauer von $|i\rangle$ ($t \ll \Gamma_i^{-1}$), ist die Übergangsrate $\Gamma_{if}^{(2)}$ praktisch konstant

$$\Gamma_{if}^{(2)} \approx \frac{1}{\hbar^2} \Gamma_{nf} (\Delta E_{if} + \hbar\omega) \left| \langle n|V|i \rangle \right|^2 \frac{1}{\Delta^2 + (\Gamma_n/2)^2}, \quad \Gamma_n^{-1} \ll \Gamma_{if}^{-1} \ll \Gamma_i^{-1}.$$

Falls das Matrixelement $\langle n|V|i \rangle$ mit Hilfe von Gl. (6.15) und (6.18) durch die energieabhängige Zerfallsrate $\Gamma_{ni}(\hbar\omega)$ ausgedrückt und die Definition für Δ eingesetzt wird, kann man $\Gamma_{if}^{(2)}$ schreiben als

$$\Gamma_{if}^{(2)} = \frac{1}{2} \pi c^2 \hbar \frac{I}{\omega^3} \frac{\Gamma_{ni}(\hbar\omega) \Gamma_{nf}(\Delta E_{if} + \hbar\omega)}{(\Delta E_{ni} - \hbar\omega)^2 + (\hbar\Gamma_n/2)^2}. \quad (6.25)$$

Dies ist die gesuchte Verallgemeinerung von Gl. (6.20). Für $\Gamma_n = 0$ stimmen Gl. (6.20) und (6.25) überein, neu hinzugekommen ist in Gl. (6.25) die endliche Breite der Verteilung ($\hbar\Gamma_n/2$). Korrekterweise müßte auch in dieser Breite Γ_n im Nenner von Gl. (6.25) die Energieabhängigkeit berücksichtigt werden. Die Breite der Kurve spielt jedoch nur in der Nähe der Resonanz $\hbar\omega \approx \Delta E_{ni}$ eine Rolle. In diesem Fall stimmen energieabhängige Rate und natürliche Rate überein. Weiter entfernt von der Resonanz dominiert die Verstimmung den in Gl. (6.25) auftretenden Nenner, so daß der exakte Wert von Γ_n keinen wesentlichen Einfluß mehr hat.

Neben der Übergangsrate (6.25) können wir auch den Wirkungsquerschnitt für den Zwei-Stufen-Prozeß $|i \rangle \rightarrow |n \rangle \rightarrow |f \rangle$ berechnen. Der Wirkungsquerschnitt ist definiert als Rate der emittierten Photonen pro Flußdichte $F = I/\hbar\omega$ der einlaufenden Photonen

$$\sigma = \frac{\Gamma_{if}^{(2)}}{F} = \frac{\pi}{2} \chi^2 \frac{\hbar^2 \Gamma_{ni}(\hbar\omega) \Gamma_{nf}(\Delta E_{if} + \hbar\omega)}{(\Delta E_{ni} - \hbar\omega)^2 + (\hbar\Gamma_n/2)^2}. \quad (6.26)$$

Anstelle der Photonenfrequenz ω wurde hierbei die Wellenlänge $\chi = c/\omega$ eingeführt. Gl. (6.26) ist formal sehr ähnlich zu dem wohlbekannten Breit-Wigner-Wirkungsquerschnitt [52], der zur Erklärung von Resonanzen in der Streuung thermischer Neutronen an Atomkernen abgeleitet wurde. Der Unterschied liegt jedoch darin, daß die in Gl. (6.26) auftretenden Zerfallsraten Γ_{ni} , Γ_{nf} und Γ_n nicht die natürlichen Zerfallsraten des Niveaus $|n \rangle$ sind, sondern die Raten eines virtuellen Niveaus,

das bei der Energie $E_i(Z,N) + \hbar\omega$ statt bei $E_n(Z,N)$ liegt. Die Abhängigkeit der Zerfallsraten von der Photonenenergie $\hbar\omega$ ist ein sehr wesentliches Ergebnis. Falls in Gl. (6.26) die natürlichen Zerfallsraten auftreten würden, wäre $\sigma \sim \lambda^2$, d. h. der Wirkungsquerschnitt würde mit klei-

nerer Photonenenergie immer größer werden. Bei Berücksichtigung der Energieabhängigkeit der Raten ist jedoch z. B. bei Dipolübergängen

$$\Gamma_{ni}(\hbar\omega) \propto \lambda^{-3},$$

so daß der Wirkungsquerschnitt für Felder großer Wellenlänge mit $\sigma \sim \lambda^{-1}$ verschwindet.

6.3 Gammazerfall

Der induzierte Gammazerfall eines isomeren Kernzustandes aufgrund von Ein-Photon-Absorption aus einem äußeren Feld wurde von Arad et al. [22] behandelt. In Ref. 22 wurde der Breit-Wigner-Wirkungsquerschnitt zur Beschreibung der anti-Stokes Raman-Streuung herangezogen und auf einen extrem nicht-resonanten Fall angewandt: die Absorption eines optischen Laserphotons durch einen Kern. Im folgenden sollen die Ergebnisse der beiden vorhergehenden Abschnitte 6.1 und 6.2 am Beispiel eines speziellen Kerns mit Ref. 22 verglichen werden.

Zuerst wollen wir jedoch einige allgemeine Formeln aus Abschnitt 6.1 für den Gammazerfall spezifizieren. Der Phasenraumfaktor $f(E)$ (6.8) hat die Gestalt

$$f(E) = \frac{1}{\pi^2 c^3 \hbar^3} E^2, \quad (6.27)$$

die Beziehung zwischen dem Übergangsmatrixelement $\langle f | W(\Delta E_{if} + \hbar\omega) | n \rangle$ in Gl. (6.9) für spontanen Gammazerfall der Polarität λ_{nf} und der natürlichen Zerfallsrate $\Gamma_{nf}^{(0)}$ lautet in Analogie zu der Beziehung (6.15) für Absorption

$$\left| \langle f | W(\Delta E_{if} + \hbar\omega) | n \rangle \right|^2 = \frac{1}{1 + \alpha_{nf}} \frac{\pi c^3 \hbar^4}{2} \frac{(\Delta E_{if} + \hbar\omega)^{2\lambda_{nf}-1}}{(\Delta E_{nf})^{2\lambda_{nf}+1}} \Gamma_{nf}^{(0)}, \quad (6.28)$$

und die energieabhängige Zerfallsrate $\Gamma_{nf}(\Delta E_{if} + \hbar\omega)$ ist beim Gammazerfall über Gl. (6.18) mit der natürlichen Zerfallsrate $\Gamma_{nf}^{(0)}$ verknüpft.

Um den direkten Vergleich mit Ref. 22 herzustellen, wählen wir ebenfalls als Beispiel den Kern ^{111}Pd (Abb. 8). Dieser Kern hat einen Spin-verbotenen isomeren Zustand bei 172 keV mit einer Halbwertszeit von $t_{1/2} = 5.5 \text{ h}$, der zu 71 % durch Gammazerfall in den Grundzustand übergeht. Wie aus den in Abb. 8 angegebenen Spins der Kernzustände zu entnehmen ist, haben wir zwischen Anfangszustand $|i\rangle$ und Zwischenzustand $|n\rangle$ einen E1-Übergang, zwischen Zwischenzustand $|n\rangle$ und Endzustand $|f\rangle$ einen E2-Übergang. Die Energieabstände betragen $\Delta E_{ni} = 530 \text{ keV}$ und $\Delta E_{if} = 172 \text{ keV}$.

Die natürlichen Zerfallsraten $\Gamma_{ni}^{(0)}$ und $\Gamma_{nf}^{(0)}$ sind nicht experimentell bekannt und müssen daher theoretisch mit Hilfe der Weisskopf-Abschätzung bestimmt werden [96]. Um realistischere Werte für $\Gamma_{ni}^{(0)}$ und $\Gamma_{nf}^{(0)}$ zu erhalten, wurden in Ref. 22 die experimentell gemessenen Lebensdauern von E1- und E2-Übergängen in Nachbarkernen von ^{111}Pd verglichen mit den theoretischen Ein-Teilchen-Lebensdauern der Weisskopf-Abschätzung. Dabei wurde für den E2-Übergang ein Wert von 10 Weisskopf-Einheiten abgeschätzt, was auf den starken kollektiven Charakter dieses Übergangs hinweist, während für den E1-Übergang 10^{-5} Weisskopf-Einheiten angegeben wurden. Dies liefert für den Übergang $|n\rangle \rightarrow |i\rangle$ eine Rate von $\hbar\Gamma_{ni}^{(0)} = 2.3 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$, für $|n\rangle \rightarrow |f\rangle$ $\hbar\Gamma_{nf}^{(0)} = 4.3 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$. Unter der Annahme, daß der Zwischenzustand $|n\rangle$ nur in die beiden Zustände $|i\rangle$ und $|f\rangle$ zerfallen kann, ergibt sich die totale Breite von $|n\rangle$ zu $\hbar\Gamma_n^{(0)} = \hbar\Gamma_{ni}^{(0)} + \hbar\Gamma_{nf}^{(0)} = 4.5 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$. Hierbei wurde weiterhin vorausgesetzt, daß innere Konversion beim Zerfall von $|n\rangle$ keine Rolle spielt. Diese Annahme ist gut gerechtfertigt, da das Niveau $|n\rangle$ mehrere 100 keV über den Niveaus $|i\rangle$ und $|f\rangle$ liegt und durch Multipolstrahlung niedriger Ordnung in diese Zustände zerfallen kann. Zum Vergleich zwischen Ein- und Zwei-Stufen-Prozeß benötigen wir noch die Rate $\Gamma_{if}^{(0)}$ für den spontanen Zerfall. Aus der Lebensdauer des isomeren Zustandes und dem Verzweungsverhältnis erhält man $\hbar\Gamma_{if}^{(0)} = 1.6 \cdot 10^{-20} \text{ eV}$.

Der Vorteil des Kerns ^{111}Pd liegt darin, daß das äußere Feld einen E1-Übergang vom isomeren Zustand $|i\rangle$ in den Zwischenzustand $|n\rangle$ induzieren kann, und daß dieser Zwischenzustand $|n\rangle$ dann hauptsächlich in den Endzustand $|f\rangle$ zerfällt, da $\Gamma_{nf} \gg \Gamma_{ni}$ ist. Trotz der Kopplung an den Anfangszustand $|i\rangle$ tendiert in diesem Beispiel das Zwischenniveau $|n\rangle$ also nicht dazu, spontan in den Anfangszustand zurückzufallen, sondern es zerfällt vorzugsweise in den gewünschten Endzustand $|f\rangle$. Der starke kollektive Charakter und der

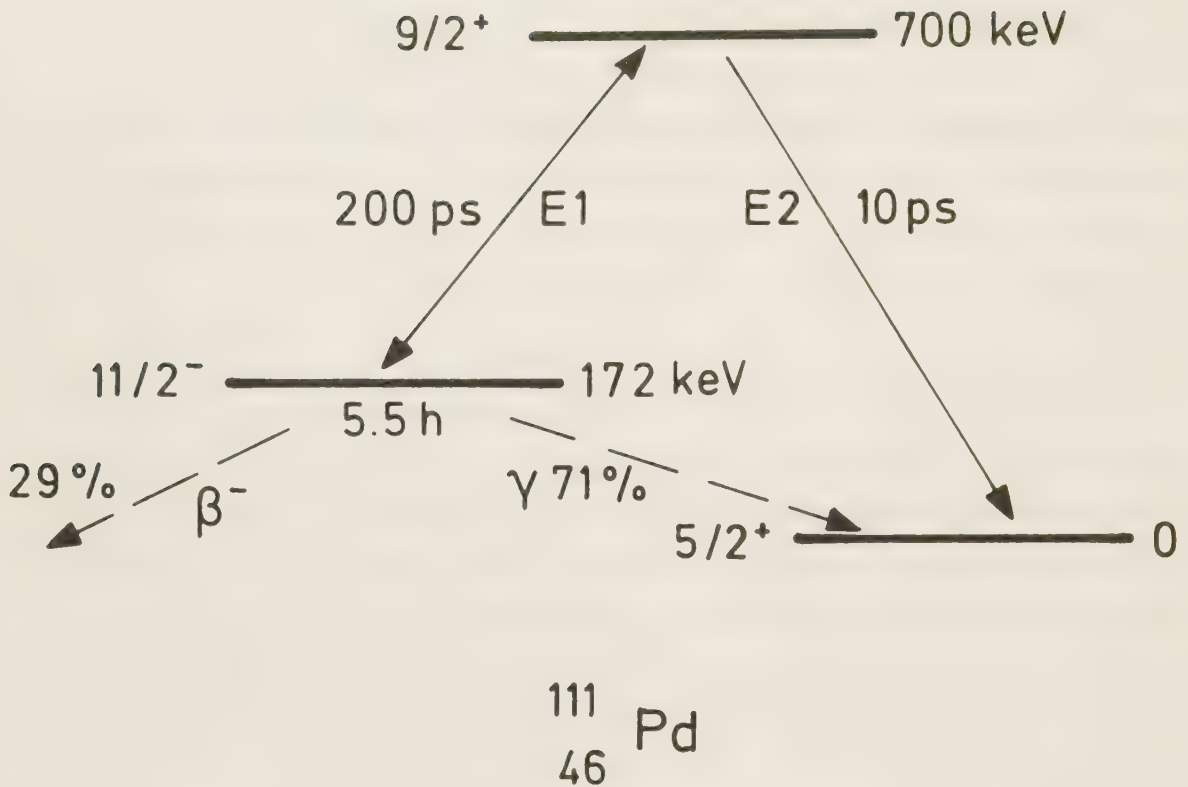


Abb. 8: Niveauschema für den Gammazerfall von $^{111\text{m}}\text{Pd}$; angegebene Zeiten bedeuten Halbwertszeiten $t_{1/2} = \ln 2 / \Gamma$; Daten aus Ref. 96.

größere verfügbare Phasenraum führen zu diesem stärkeren E2- als E1-Zerfall des Zwischenniveaus. Der Nachteil liegt natürlich in dem großen Energieabstand zwischen Anfangs- und Zwischenzustand von $\Delta E_{ni} = 530 \text{ keV}$. Intensive, quasimonochromatische Felder mit solch großer Photonenenergie existieren nicht, so daß Experimente mit resonanter Anregung derzeit nicht möglich sind. Bei nichtresonanter Anregung reduziert ein so großer Niveauabstand die Rate für Zwei-Stufen-Prozesse beträchtlich.

Wir wollen zuerst in Analogie zu Ref. 22 als äußeres Feld einen Nd-Laser der Intensität $I = 10^{15} \text{ W/cm}^2$ mit einer Photonenenergie $\hbar\omega = 1.17 \text{ eV}$ betrachten. In diesem Fall ist das äußere Feld extrem weit von der Resonanz entfernt, so daß die Anwendung von Gl. (6.25) eigentlich nicht erlaubt ist, da die drei in Anschluß an Gl. (6.2) erläuterten Näherungen nicht mehr gerechtfertigt sind. Für eine grobe Abschätzung der Feldeffekte wollen wir jedoch annehmen,

daß man den Kern als Drei-Niveau-System beschreiben kann. Dann erhält man aus Gl. (6.25) mit (6.18) als Verhältnis zwischen der Zerfallsrate im äußeren Feld und der Zerfallsrate ohne äußeres Feld [127]

$$R = \frac{\Gamma_{if}^{(0)} + \Gamma_{if}^{(2)}}{\Gamma_{if}^{(0)}} = 1 + 3 \cdot 10^{-13}.$$

Die Verstärkung des Zerfalls ist bei heute verfügbaren Lasern viel zu gering, um sie experimentell nachweisen zu können. Auch die Berücksichtigung aller Zwischenzustände in der Störungstheorie wird an diesem Ergebnis wenig ändern.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß bei dem hier betrachteten Beispiel der Prozeß $|i\rangle \rightarrow |n\rangle \rightarrow |f\rangle$ nicht der stärkste Zwei-Stufen-Prozeß ist. Aufgrund der großen Energiedifferenz ΔE_{ni} und der kleinen Photonenenergie $\hbar\omega$ ist es wahrscheinlicher, daß es statt zu einem virtuellen E1-Übergang zwischen $|i\rangle$ und $|n\rangle$ zu einem virtuellen M1-Übergang zwischen magnetischen Unterzuständen des Niveaus $|i\rangle$ kommt. Diese M1-Übergänge, die sich auf das Zwei-Niveau-System $\{|i\rangle, |f\rangle\}$ beschränken, wurden von Collins et al. untersucht [42,43,45]. Im vorliegenden Beispiel erhalten wir als Verhältnis zwischen Zwei-Stufen-Prozessen, bei denen das virtuelle Zwischen-niveau ein magnetischer Unterzustand von $|i\rangle$ ist, und spontanem Zerfall (Ref. 43, Gl. 52)

$$\frac{\Gamma_{if}^{(2)}(M1)}{\Gamma_{if}^{(0)}} = 9 \cdot 10^{-10}.$$

Die M1-Absorptionen dominieren also die E1-Absorptionen um etwa einen Faktor $3 \cdot 10^3$.

In Ref. 45 wurde bis zu dritter Ordnung Störungstheorie gezeigt, daß durch Emission und Absorption von Photonen aus dem Laserfeld mittels dieses M1-Mechanismusses symmetrische Seitenbänder um die feldfreie Linie im Emissionsspektrum des Zustandes $|i\rangle$ entstehen. Solche Seitenbänder zu Mössbauer-Linien wurden auch experimentell in Radiofeldern beobachtet [44]. In Ref. 45 wurde jedoch auch gezeigt, daß sich mit niederenergetischen Photonen durch Übergänge zwischen magnetischen Unterzuständen die totale Zerfallsrate nicht ändern läßt. Es treten zwar diese Seitenbänder auf, doch wird gleichzeitig auch die feldfreie Linie aufgrund destruktiver Interferenzen mit elastischen Photonen-Streuprozessen höherer Ordnung geschwächt, so daß die gesamte emittierte Intensität konstant bleibt. Dies ist auch anschaulich

klar, da zum einen durch die M1-Übergänge nur eine Umverteilung der Unterzustände bewirkt wird und die Auswahlregeln des Zerfalls nicht beeinflusst werden, und da zum anderen die Modifikation des Phasenraums bei niederenergetischen Photonen sehr gering ist.

Im Gegensatz zu diesen Ergebnissen wurde in Ref. 22 für die Verstärkung des Zerfalls von $^{111}\text{m}\text{Pd}$ in einem Nd-Laserfeld ein Wert von $R \sim 8 \cdot 10^4$ angegeben. Dieser gewaltige Unterschied zu unserem Ergebnis rührt daher, daß in Ref. 22 einfach die Breit-Wigner-Formel aus der Literatur übernommen und auf dieses extrem nichtresonante Beispiel angewandt wurde. Die Abweichung in den Ergebnissen entspricht gerade dem Faktor $(\hbar\omega/\Delta E_{ni})^3 \sim 10^{-17}$ in Gl. (6.18), den man vernachlässigt, wenn man in der Breit-Wigner-Formel die natürliche Rate $\Gamma_{ni}^{(0)}$ statt der feldabhängigen Rate $\Gamma_{ni}(\hbar\omega)$ für den E1-Übergang einsetzt. (Interessanterweise wurde in den Rechnungen in Ref. 22 für den Übergang $|n\rangle \rightarrow |f\rangle$ $\Gamma_{nf}(\Delta E_{if} + \hbar\omega)$ statt $\Gamma_{nf}^{(0)}$ verwendet, nicht jedoch für den Übergang $|n\rangle \rightarrow |i\rangle$, bei dem sich dieser Unterschied wesentlich dramatischer bemerkbar macht.)

Zur physikalischen Erklärung der berechneten großen Verstärkung von Kernzerfällen mittels Laserfeldern wurden in Ref. 22 Parallelen zu experimentell beobachteten Übergängen in Atomen unter dem Einfluß von Mikrowellenfeldern [128] gezogen. Dieser Vergleich ist jedoch irreführend. Wie beispielsweise aus Gl. (6.9) ersichtlich ist, ist die entscheidende Energiedifferenz der Abstand ΔE_{ni} zwischen Anfangs- und Zwischenniveau. Bei dem Prozeß, der in Ref. 128 beobachtet wurde, liegt der Zwischenzustand $|n\rangle$ sehr nahe am Anfangszustand $|i\rangle$ ($\Delta E_{ni} \lesssim 3\hbar\omega$), während wir beim Kern ^{111}Pd $\Delta E_{ni} \sim 5 \cdot 10^5 \hbar\omega$ haben. Wie man aus Gl. (6.25) ansehen kann, würde jedoch auch $\Delta E_{ni} \lesssim 3 \hbar\omega$ noch nicht zu einer großen Rate von Zwei-Stufen-Prozessen führen, solange die Verstimmung $(\Delta E_{ni} - \hbar\omega)$ groß gegen die Breite $\hbar\Gamma_n$ des Zwischen-niveaus ist. Nur für $|\Delta E_{ni} - \hbar\omega| \lesssim \hbar\Gamma_n/2$ durchläuft man die resonante Verstärkung. In Ref. 128 ist die Breite vergleichbar mit der Verstimmung, während wir bei ^{111}Pd $\hbar\Gamma_n/\Delta E_{ni} \sim 10^{-10}$ haben!

Der wesentliche Unterschied zwischen der Anregung von Molekülen oder Atomen mit äußeren Feldern und der Anregung von Atomkernen liegt gerade darin, daß die Lebensdauer nuklearer Niveaus vergleichbar ist mit der atomarer Niveaus, während der Niveauabstand im Kern um viele Größenordnungen größer ist. Dies

führt in Atomkernen zu sehr kleinen Verhältnissen zwischen der Breite $\hbar\Gamma_n$ des Zwischenniveaus $|n\rangle$ und dem Abstand ΔE_{ni} zum Anfangszustand (10^{-10} im vorliegenden Beispiel). Dies ermöglicht zwar einerseits sehr große Verstärkungen (von 10^{20}) wenn man aus dem Bereich nichtresonanter Anregung in den Bereich resonanter Anregung übergeht. Andererseits ist diese Verstärkung nur mit sehr schmalbandigen Feldern ($\Delta\lambda/\lambda \sim 10^{-10}$) zu erreichen. Um also die Gültigkeit von Gl. (6.25) zu testen, sind Experimente mit Atomen in Mikrowellenfeldern wesentlich besser geeignet als Experimente mit Kernen in Laserfeldern. Damit könnte die Energieabhängigkeit der Zerfallsraten und der Breite der Verteilung bei nichtresonanter Anregung bestätigt werden.

Wir wollen noch angeben, welche Feldparameter nötig wären, um wirklich einen meßbaren Beitrag der Zwei-Stufen-Prozesse zu erzielen. Um die gleiche Rate für direkten und für anti-Stokes-Zerfall zu erhalten, benötigt man einen Nd-Laser, der ein Feld der Intensität I bzw. der Feldstärke E_0 ($E_0^2 = 2I/\epsilon_0 c$) erzeugt von

$$I = 3 \cdot 10^{27} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}, \quad E_0 = 2 \cdot 10^{15} \frac{\text{V}}{\text{cm}} \quad \left(T_{if}^{(2)} = T_{if}^{(0)} \right).$$

Wir werden im nächsten Kapitel in Gl. (7.19) sehen, daß die Störungstheorie auch bei diesen extremen Intensitäten noch anwendbar ist. Die berechnete Feldstärke ist sogar noch etwas geringer als die kritische Feldstärke. Bei Kernen, bei denen es weniger geeignete Zwischenniveaus $|n\rangle$ gibt als bei ^{111}mPd , liegt die Feldstärke E_0 entsprechend höher. Dies ist in Übereinstimmung mit unserer Abschätzung in Abschnitt 2.3, daß man Kerne in nicht-resonanten Feldern durch nichtwechselwirkende Zustände beschreiben kann, solange die Feldstärke klein gegen die kritische Feldstärke ist. Für den Betazerfall können wir dieses Ergebnis auch umkehren: sobald die Feldstärke vergleichbar mit der kritischen Feldstärke wird, trägt nicht nur die in Kapitel III - V betrachtete Wechselwirkung zwischen dem Feld und dem emittierten Elektron zur Änderung der Lebensdauer bei, sondern auch die Wechselwirkung zwischen dem Kern und dem äußeren Feld.

Wie oben erwähnt, reicht in der Resonanz ein viel schwächeres Feld zur Erzeugung der anti-Stokes-Prozesse aus. Für ein Feld, dessen Photonen die Energie $\hbar\omega = 528 \text{ keV}$ haben bei einer Monochromasie von $\Delta\lambda/\lambda \sim 10^{-10}$, genügt eine Intensität I bzw. ein Photonenfluß F von

$$I = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}, \quad F = 6 \cdot 10^{16} \frac{1}{\text{s} \cdot \text{cm}^2} \quad \left(\Gamma_{if}^{(2)} = \Gamma_{if}^{(0)} \right).$$

um direkte und anti-Stokes-Prozesse mit derselben Rate zu erzeugen. Natürlich sind die Niveauabstände im Kern nicht mit einer Genauigkeit von 10^{-10} bekannt, so daß die Frequenz des äußeren Feldes über den Resonanzbereich variiert werden muß. Wir werden in Kap. VII in Gl. (7.19) sehen, daß man bei resonanter Anregung mit dieser Intensität an die Grenze der Gültigkeit der Störungstheorie stößt, da das Übergangsmatrixelement vergleichbar wird mit dem Produkt der Zerfallsraten $\hbar \sqrt{\Gamma_i \Gamma_n}$. Zur Beschreibung der resonanten Anregung mit noch stärkeren Feldern benötigt man die im nächsten Kapitel abzuleitende Starkfeld-Theorie, die für beliebig intensive Felder gültig ist.

6.4 Betazerfall

Der gammainduzierte Betazerfall kann ebenfalls durch Gl. (6.25) beschrieben werden. Für die in Abschnitt 6.1 ausgeführten Rechnungen ist zu beachten, daß beim Betazerfall über den Phasenraum von zwei emittierten Teilchen zu integrieren ist. Für erlaubten Betazerfall $|n\rangle \rightarrow |f\rangle$ erhalten wir für den Phasenraumfaktor $f(E)$ in Gl. (6.9) bei Vernachlässigung des Elektron- und des Neutrinospins

$$f_{\beta}(E) = \frac{\omega^5 c^4}{4 \pi^4 \hbar^6} F\left(\frac{E}{\omega c^2}\right). \quad (6.29)$$

Der dimensionslose Faktor F ist in Gl. (3.44) definiert. Bei Berücksichtigung relativistischer Coulomb-Korrekturen hat dieser Faktor die Gestalt [129]

$$F(\varepsilon_0) = \int_1^{\varepsilon_0} d\varepsilon \, g(Z, R) \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - 1} (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2. \quad (6.30)$$

Die Elektronendichte $\rho(Z, R)$ am Kernort hängt von der Kernladung Z und dem Kernradius R ab.

Bei erlaubtem Betazerfall ist das Matrixelement $\langle f|W|n\rangle$ in Gl. (6.9) unabhängig von der Energie der emittierten Teilchen und damit identisch mit dem Matrixelement, das den natürlichen Zerfall beschreibt. Übergangsmatrix-

element und natürliche Zerfallsrate sind dann verknüpft über

$$|\langle f | W | n \rangle|^2 = \frac{2\pi^3 \hbar^7}{m^5 c^4} \frac{\Gamma_{nf}^{(0)}}{F\left(\frac{\Delta E_{nf}}{m c^2}\right)} . \quad (6.31)$$

Die energieabhängige Zerfallsrate $\Gamma_{nf}(E)$, durch die der unterschiedliche Phasenraum für den Zerfall des reellen Niveaus $|n\rangle$ und des virtuellen Zwischenniveaus berücksichtigt wird, ist beim Betazerfall über den Faktor F (6.30) mit der natürlichen Zerfallsrate $\Gamma_{nf}^{(0)}$ verbunden:

$$\Gamma_{nf}(E) = \frac{F\left(\frac{E}{m c^2}\right)}{F\left(\frac{\Delta E_{nf}}{m c^2}\right)} \Gamma_{nf}^{(0)} . \quad (6.32)$$

Abb. 9 zeigt als ein Beispiel für photoinduzierten Betazerfall den β^- -Zerfall von ^{129}J . Der Zerfall des Grundzustandes von ^{129}J ist in zweiter Ordnung verboten, was zu der sehr langen Lebensdauer von $1.6 \cdot 10^7$ y führt. Dagegen kann der angeregte $5/2^+$ -Zustand durch erlaubten Betazerfall in den angeregten $3/2^+$ -Zustand von ^{129}Xe übergehen. Die Zerfallsrate dieses angeregten Zustandes sollte um mehrere Größenordnungen größer sein als die entsprechende Zerfallsrate des Grundzustandes. Die Zerfallsrate $\Gamma_{nf}^{(0)}$ ist noch nicht gemessen worden, da der Zerfallskanal $|n\rangle \rightarrow |f\rangle$ bisher experimentell nicht zugänglich ist. Mit Hilfe der hier betrachteten Zwei-Stufen-Prozesse könnte man jedoch durch Messung von $\Gamma_{if}^{(2)}$ $\Gamma_{nf}^{(0)}$ experimentell bestimmen. Diese Zwei-Stufen-Prozesse eröffnen somit ein neues Feld für die Kernspektroskopie.

Bei ^{129}J ist das Zwischenniveau $|n\rangle$ über einen M1-Übergang mit $\Delta E_{ni} = 28$ keV an den Grundzustand $|i\rangle$ gekoppelt. Bei solch kleinen Energien muß die beobachtete Lebensdauer für den Zerfall $|n\rangle \rightarrow |i\rangle$ um den Anteil der inneren Konversion korrigiert werden. Mit diesem kleinen ΔE_{ni} -Wert liegt man auch bei resonanter Anregung noch im Bereich von Synchrotron-Quellen. Ein wesentlicher Unterschied zwischen photoinduziertem Gamma- und Betazerfall liegt darin, daß wir in ^{111}Pd ein Beispiel für Gammazerfall gefunden haben, bei dem das Zwischenniveau $|n\rangle$ hauptsächlich in den Endzustand $|f\rangle$ zerfällt, während beim Betazerfall allein aufgrund der unterschiedlichen Kopplungskonstanten von schwacher und elektromagnetischer Wechselwirkung das Zwischenniveau überwiegend in den Grundzustand $|i\rangle$ zurückfallen wird.

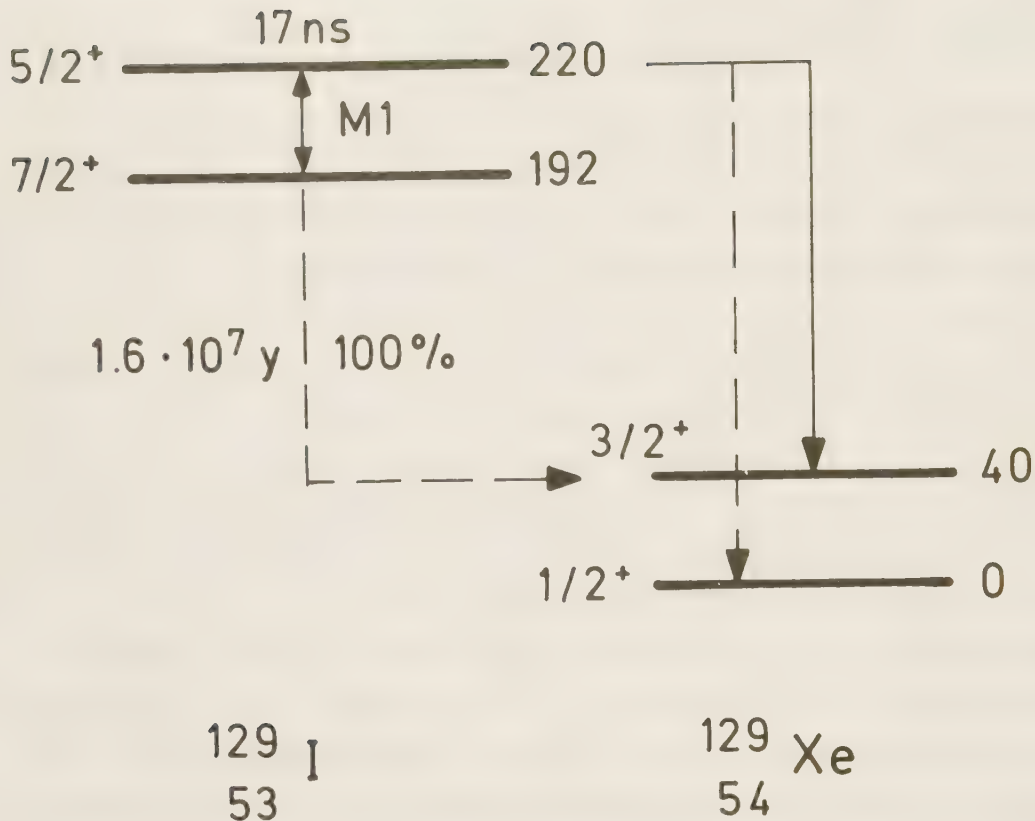


Abb. 9: Niveauschema für den β^- -Zerfall $^{129}_{53}\text{I} \rightarrow ^{129}_{54}\text{Xe}$; durchgezogener Pfeil: erlaubter Zerfall, unterbrochene Pfeile: (in zweiter Ordnung) verbotene Zerfälle; Energien in keV; angegebene Zeiten bedeuten Halbwertszeiten $t_{1/2} = \ln 2 / \Gamma$; Daten aus Ref. 96.

6.5 Elektroneneinfang, Bestimmung der Neutrinomasse

Beim Elektroneneinfang [130] ist der Phasenraumfaktor $f(E)$ (6.8) identisch mit dem entsprechenden Faktor beim Gammazerfall (6.27)

$$f_{\text{capture}}(E) = \frac{1}{2\pi^2 c^3 \hbar^3} E^2. \quad (6.33)$$

(Gl. (6.27) und (6.33) unterscheiden sich um einen Faktor 2, da für Gl. (6.27) über die beiden Photonenpolarisationen summiert wurde, während wir in diesem Abschnitt von spinlosen Neutrinos ausgehen.) Aufgrund von Gl.

(6.33) kann die in der Breit-Wigner-Formel (6.25) auftretende energieabhängige Zerfallsrate $\Gamma_{nf}(\Delta E_{if} + \hbar\omega)$ aus der natürlichen Rate $\Gamma_{nf}^{(0)}$ für Elektroneneinfang im Zustand $|n\rangle$ bestimmt werden durch

$$\Gamma_{nf}(E) = \left(\frac{E}{\Delta E_{nf}} \right)^2 \Gamma_{nf}^{(0)} . \quad (6.34)$$

Bei erlaubtem Elektroneneinfang ist das Übergangsmatrixelement $\langle f|W|n\rangle$ in Gl. (6.9) unabhängig von der Energie des emittierten Teilchens und damit identisch mit dem Matrixelement des natürlichen Zerfalls. Dann lautet die Beziehung zwischen Übergangsmatrixelement und natürlicher Zerfallsrate

$$|\langle f|W|n\rangle|^2 = \pi c^3 \hbar^4 \frac{\Gamma_{nf}^{(0)}}{\Delta E_{nf}^2} . \quad (6.35)$$

Abb. 10 zeigt zwei Lanthan-Isotope als mögliche Kandidaten für photoinduzierten Elektroneneinfang, wobei das Photon vom Kern absorbiert wird und diesen in ein tiefliegendes Zwischenniveau $|n\rangle$ anregt. In beiden Fällen ist der Zerfall des Grundzustandes in zweiter Ordnung verboten, während der Zerfall vom Zwischenniveau aus erlaubt ist. Bei ^{137}La wird das Zwischen-niveau über einen M1-Übergang bevölkert, bei ^{138}La über einen E2-Übergang.

Von besonderem Interesse ist der photoinduzierte Elektroneneinfang, bei dem das Photon von einem Elektron der Atomhülle absorbiert wird. Mit diesem Prozeß lassen sich zwar keine Kernzerfälle beschleunigen, da die Auswahlregeln für den Kern nicht beeinflußt werden und das Elektron nur in einen Zustand angeregt wird, aus dem auch ohne Feld Elektroneneinfang stattfindet. Mit induziertem Elektroneneinfang wie in Abb. 7 b eröffnet sich jedoch u. U. eine Möglichkeit, die Ruhemasse des Neutrinos sehr genau zu bestimmen.

Die Standardmethode zur Abschätzung der Neutrinomasse besteht in der sehr genauen Vermessung des oberen Endes der Energieverteilung der emittierten Elektronen beim Betazerfall. Die Form des Spektrums bei einem Drei-Körper-Zerfall wie dem erlaubten Betazerfall ist durch rein kinematische Phasenraumfaktoren bestimmt und erlaubt somit direkte Rückschlüsse auf die Masse der beteiligten Teilchen. Aus der Form des hochenergetischen Endes des Spektrums kann auch eine sehr kleine oder gar verschwindende Masse wie die des Neutrinos bestimmt werden. Alle diesbezüglichen Experimente werden am Tritium mit dem sehr kleinen Q-Wert $Q = 18.6 \text{ keV}$ durchgeführt [131]. Die

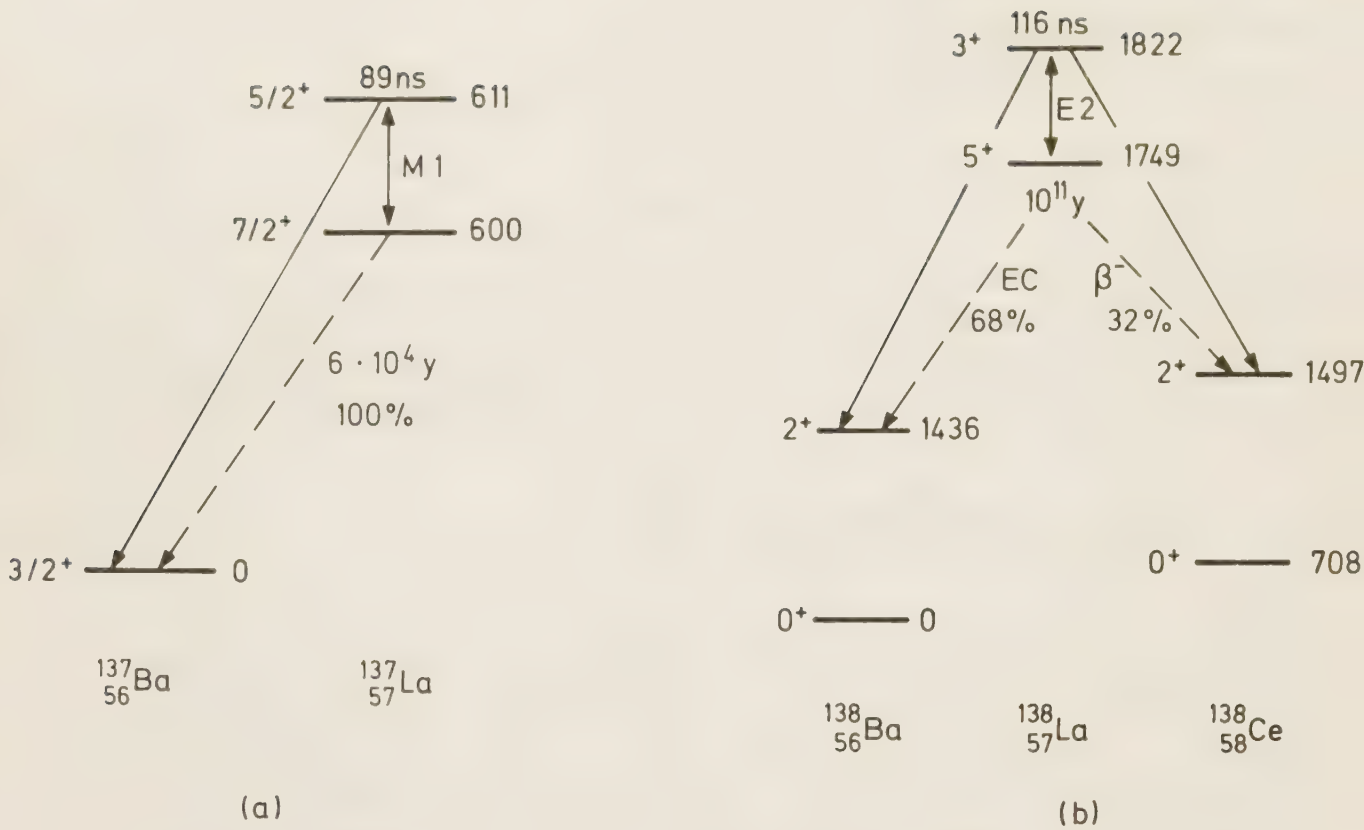


Abb. 10: Niveauschema für Zerfall von ^{137}La und ^{138}La ; Energien (in keV) beziehen sich auf neutrale Atome im Grundzustand, Zeiten bezeichnen Halbwertszeiten $t_{1/2} = \ln 2 / \Gamma$, Daten aus Ref. 96. a) Elektroneneinfang $^{137}\text{La} \rightarrow ^{137}\text{Ba}$; b) ^{138}La kann durch Elektroneneinfang in ^{138}Ba und durch β^- -Zerfall in ^{138}Ce zerfallen. Beide Zerfallsmoden sind im Grundzustand in zweiter Ordnung verboten und im angeregten Zustand erlaubt.

teilweise widersprüchlichen Ergebnisse lassen den Schluß zu, daß die Elektron-Antineutrino-Masse zumindest kleiner als etwa 50 eV ist. Wesentlich genauere Daten können aus dem Elektronenspektrum im Betazerfall nicht gewonnen werden, da sich die Elektronenenergie nicht wesentlich genauer bestimmen läßt. Zum einen wechselwirken die emittierten Elektronen mit anderen Elektronen im Atom oder Molekül und können verschiedene inelastische Streuprozesse ausführen, zum anderen ist die Energieauflösung für Elektronen begrenzt. Daher läßt sich die Neutrino-Masse nur dann aus der Form des oberen Endes des Tritium-Spektrums bestimmen, wenn sie im Bereich von etwa 10 eV oder darüber liegt. Geringere Massen lassen sich mit dieser Methode nicht mehr auflösen.

Um diese zwei Fehlerquellen zu vermeiden, sollte man schwache Zerfälle betrachten, bei denen keine geladenen Teilchen emittiert werden. Der Elektroneneinfang liefert keine Information über die Neutrinomasse, da nur monochromatische Neutrinos emittiert werden. Es gibt jedoch einen Prozeß höherer Ordnung, an dem ein Elektronen-Einfang beteiligt ist und der zur Bestimmung der Neutrino-Masse in Frage kommen könnte: der Elektroneneinfang mit innerer Bremsstrahlung [132]. Bei diesem Prozeß (Abb. 11a) findet der Elektroneneinfang aus einem (virtuellen) energetisch erlaubten Zwischenniveau statt, danach wird durch Übergang des erzeugten Lochs in der Atomhülle von dem Zwischenzustand zu einem höherliegenden Niveau ein Röntgenquant emittiert. Elektroneneinfang mit innerer Bremsstrahlung spielt vor allem bei den Zuständen eine Rolle, bei denen der direkte Elektroneneinfang aufgrund der verschwindenden Elektronendichte am Kernort verboten ist, also bei P-Zuständen. Der Elektroneneinfang mit innerer Bremsstrahlung ist genauso wie der β^+ - oder β^- -Zerfall ein Drei-Körper-Zerfall. Es werden ein Neutrino und ein Röntgenquant emittiert und das obere Ende des Photonenspektrums ist wieder aufgrund von Phasenraumfaktoren sensitiv auf die Neutrinomasse. Bei der Untersuchung des Photonenspektrums erübrigen sich die beiden Probleme, die beim Elektronenspektrum auftreten. Die Photonenenergie läßt sich wesentlich präziser bestimmen und Wechselwirkungen mit der Umgebung des Kerns sind vernachlässigbar. Als theoretische Grenze für die Auflösung der Neutrinomasse bei Elektroneneinfang mit innerer Bremsstrahlung werden Bruchteile von eV angegeben [133].

Das entscheidende Problem bei der Bestimmung der Neutrinomasse aus der inneren Bremsstrahlung liegt natürlich in der extrem geringen Rate für den Zweistufen-Prozeß. Es ist jedoch seit der theoretischen Behandlung dieser Zweistufen-Zerfälle von nP-Zuständen durch Glauber und Martin [134] bekannt, daß das Photonenspektrum Resonanzen aufweist bei Energien, die mit den atomaren Übergangsenergien übereinstimmen, d. h. bei den Energien der charakteristischen Röntgenstrahlung. Diese resonante Verstärkung der Rate für innere Bremsstrahlung bei bestimmten Energien wurde von De Rújula [133] zu einem Vorschlag für die experimentelle Bestimmung der Neutrinomasse ausgenutzt: da man die Neutrinomasse nur aus der Form des Endpunktes des Photonenspektrums bestimmt, muß man nach Kernen suchen, bei denen das Ende des Photonenspektrums zufälligerweise mit einer Resonanz zusammenfällt. Dann ist die Rate für Zweistufen-Prozesse am Endpunkt des Spektrums möglicherweise groß genug, um sie experimentell vermessen zu können.

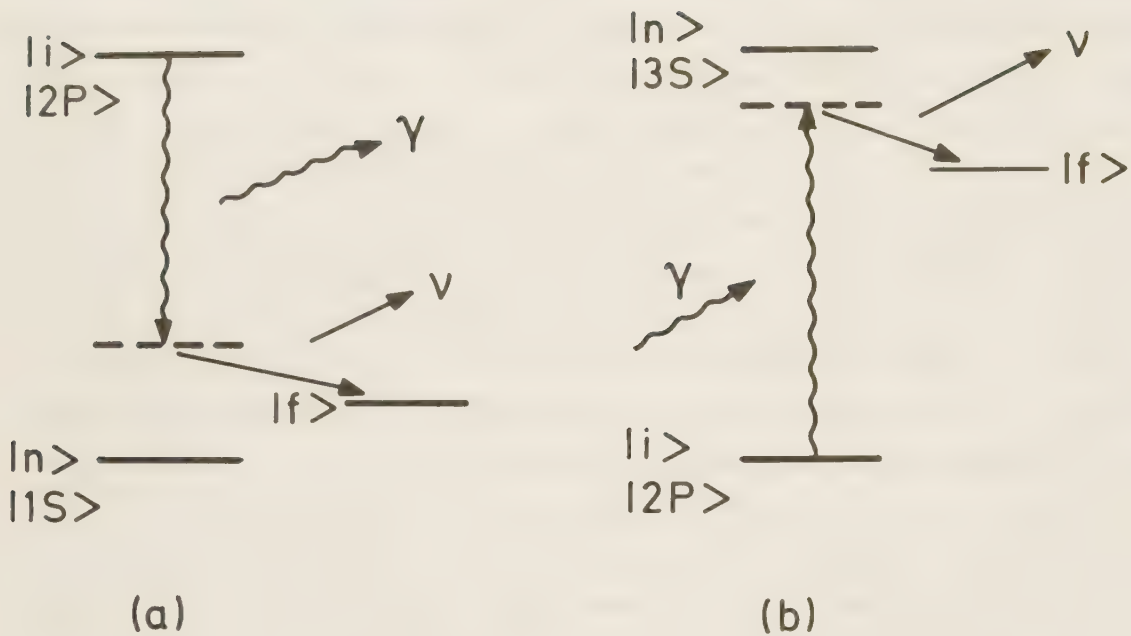


Abb. 11: Geeignetes Niveauschema für resonante Verstärkung von Zerfällen mit sehr kleiner Neutrinoenergie $E_\nu \approx 0$ bei (a) Elektroneneinfang mit innerer Bremsstrahlung und bei (b) photoinduziertem Elektroneneinfang. Die Bezeichnungen $|1S\rangle$, $|2P\rangle$, $|3S\rangle$ stellen Beispiele für die Elektronenzustände im Anfangs- und Zwischenzustand $|i\rangle$ und $|n\rangle$ dar. In beiden Beispielen hat der Endzustand $|f\rangle$ ein Loch in der 2P-Schale.

Die meisten in der Natur vorkommenden Kerne zerfallen durch K-Einfang, da der Endzustand $|f\rangle$ wesentlich tiefer liegt als der Zwischenzustand $|n\rangle$. Resonanzen am Endpunkt des Photonspektrums sind in diesem Fall nicht möglich. Falls jedoch die Energiedifferenz zwischen Anfangs- und Endkern so klein ist, daß beispielsweise K-Einfang oder sogar L-Einfang energetisch verboten oder fast verboten ist, so gibt es Zwischenzustände $|n\rangle$, die niedriger als oder in der Nähe von $|f\rangle$ liegen. Eine solche Situation ist in dem Beispiel von Abb. 11 a dargestellt. Bei verschwindender kinetischer Energie des Neutrinos $E_\nu \approx 0$ stimmt die Photonenenergie fast mit der charakteristischen Röntgenstrahlung überein, so daß resonante Verstärkung zu erwarten ist. Natürlich verlangt das Niveauschema in Abb. 11 a eine sehr glückliche Konstellation der Energiedifferenzen: der Energieabstand ΔE_{if} , der durch die nuklearen (und atomaren) Energieniveaus bestimmt ist, muß vergleichbar sein mit dem Energieabstand ΔE_{in} , der nur durch die atomaren Energieabstände gegeben ist. Am aussichtsreichsten erscheinen derzeit Experimente an ^{163}Ho (Abb. 12), das durch M-

Einfang sowie Einfang aus höheren Schalen zerfällt.

Statt der inneren Bremsstrahlung kann man auch den entsprechenden Zwei-Stufen-Prozeß, bei dem ein Photon absorbiert wird, zur Bestimmung der Neutrinomasse verwenden [135]. Das Elektron wird dabei durch Elektroneneinfang aus einem virtuellen Zwischenniveau absorbiert, und das in diesem Zwischenniveau erzeugte Loch wird durch Photonenabsorption in eine weiter innen liegende Schale angeregt, wie in Abb. 11b skizziert. Optimal für die Bestimmung der Neutrinomasse wäre wieder ein Niveauschema, bei dem das Zwischenniveau $|n\rangle$ und das Endniveau $|f\rangle$ fast dieselbe Energie besitzen, so daß Zerfälle mit $E_\nu \approx 0$ resonant verstärkt werden.

Zur Beschreibung des photoinduzierten Elektroneneinfangs kann wieder Gl.(6.25) verwendet werden. Die energieabhängige Rate $\Gamma_{nf}(\Delta E_{if} + \hbar\omega)$ soll jetzt jedoch nicht mehr über Gl. (6.34) mit der natürlichen Rate $\Gamma_{nf}^{(0)}$ verknüpft sein, sondern wir wollen auch die mögliche Neutrinomasse in den Phasenraumfaktoren mit berücksichtigen:

$$\Gamma_{nf}(E) = \frac{\bar{E}}{\Delta E_{nf}} \sqrt{\frac{E^2 - (m_\nu c^2)^2}{(\Delta E_{nf})^2 - (m_\nu c^2)^2}} \Gamma_{nf}^{(0)} \quad (6.36)$$

Als ein Beispiel für photoinduzierten Elektroneneinfang wollen wir den Zerfall von ^{163}Ho in ^{163}Dy betrachten. Das Niveauschema ist in Abb. 12 dargestellt. Wie zu Beginn dieses Kapitels erläutert, sollte man sich die Photonenabsorption in der besetzten Atomhülle aufgrund des Pauli-Prinzips so vorstellen, daß zuerst der Elektroneneinfang aus einer höheren Schale stattfindet und dann erst ein inneres Elektron durch Absorption eines Photons in diese höhere Schale angeregt wird. Als Zwischenzustand $|n\rangle$ ist also ein angeregter elektronischer Zustand des neutralen Tochteratoms ^{163}Dy mit einem Loch in einer höheren Schale zu wählen. Entsprechend werden in Abb. 12 die Anregungsenergien für ein Loch in verschiedenen atomaren Schalen von ^{163}Dy aufgeführt [133]. Ohne äußeres Feld zerfällt ^{163}Ho durch M-Einfang mit einer Halbwertszeit von $4 \cdot 10^4$ y in ^{163}Dy [136]. Der Kern geht durch erlaubten schwachen Zerfall von $^{163}\text{Ho}(7/2^-, \text{g.s.})$ in $^{163}\text{Dy}(5/2^-, \text{g.s.})$ über. Der Q-Wert, d. h. die Massendifferenz zwischen den neutralen Atomen ^{163}Ho und ^{163}Dy , beträgt 2.3 ± 1.0 keV.

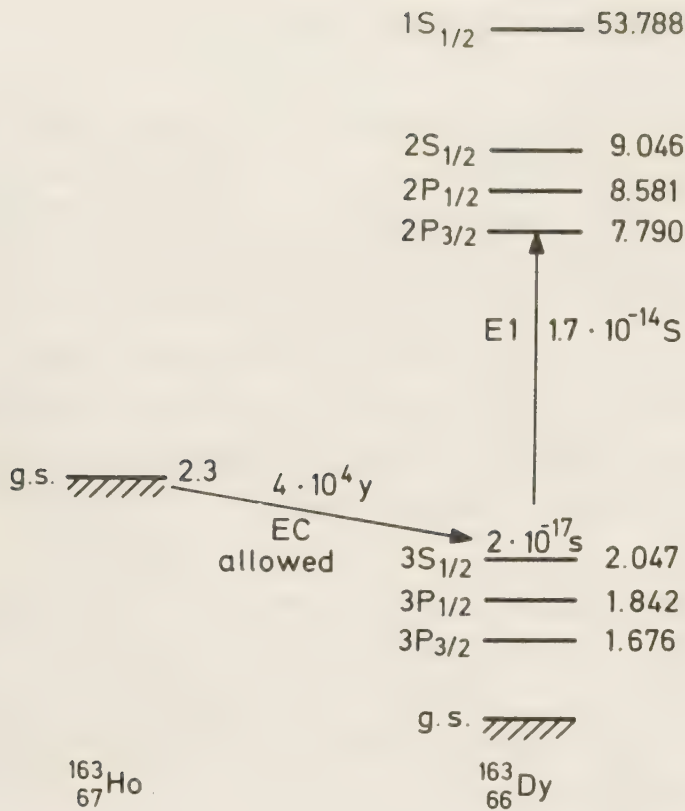


Abb. 12: Niveauschema für den Zerfall $^{163}\text{Ho} \rightarrow ^{163}\text{Dy}$. Energien in keV, Daten aus Ref. 133 und 136. Als Energie-Nullpunkt wurde die Energie des neutralen ^{163}Dy -Atoms im Grundzustand gewählt. Die angeregten Niveaus von ^{163}Dy bezeichnen Lochzustände in der Atomhülle, die angegebenen Energien die Ionisierungsenergien für Elektronen in den jeweiligen Zuständen.

Bei dem Elektroneneinfang mit innerer Bremsstrahlung werden Prozesse untersucht, bei denen ^{163}Ho durch M-Einfang in ^{163}Dy zerfällt, das dann durch Aussendung eines Photons in einen 3P-Lochzustand übergeht. Dieses Photon muß in Koinzidenz mit der M_{II} -oder M_{III} -Röntgenstrahlung bzw. den entsprechenden Auger-Elektronen beobachtet werden. Beim photoinduzierten Elektroneneinfang zerfällt ^{163}Ho ebenfalls durch M-Einfang in ^{163}Dy , das dann durch Absorption eines Photons in einen 2P-Lochzustand übergeht. Dieser Prozess kann durch Messung der L_{II} - oder L_{III} -Serie der Röntgenstrahlung bzw. der entsprechenden Auger-Elektronen nachgewiesen werden. Diese Strahlung kann beim feldfreien Zerfall nicht auftreten, da L-Einfang energetisch verboten ist.

Aus der Halbwertszeit für den M-Einfang erhält man $\tau_{\text{nf}}^{(0)} = 4 \cdot 10^{-28} \text{ eV}$. (Obwohl der L-Einfang durch die Wechselwirkung mit dem Feld im Endzustand induziert wird (Abb. 12), wählen wir die Notation der Zustände so, als ob die Wechselwirkung im Anfangszustand zum photoinduzierten Elektroneneinfang führt (Abb. 7b und 11b), da Gl. (6.25) für Feldwechselwirkung im Anfangszustand abgeleitet wurde.) Die

Raten Γ_{ni} und Γ_n müssen theoretisch bestimmt werden. Die relativistische Hartree-Slater-Theorie liefert als Rate für die Emission von Röntgenstrahlung beim Auffüllen eines Loches in der $2P_{3/2}$ -Schale von ^{163}Dy aus der $3S_{1/2}$ -Schale heraus $\hbar\Gamma_{ni}^{(0)} = 0.027 \text{ eV}$ [137], entsprechend einer Halbwertszeit von $t_{1/2} = 1.7 \cdot 10^{-14} \text{ s}$. Die Gesamtbreite des $3S_{1/2}$ -Zwischenzustandes ergibt sich nach Summation über die Raten für Emission von Röntgenstrahlung, Auger- und Coster-Kronig-Elektronen zu $\hbar\Gamma_n$ (in Resonanz) $\approx 20 \text{ eV}$ [138], entsprechend einer Halbwertszeit von $t_{1/2} \approx 2 \cdot 10^{-17} \text{ s}$. Das Zwischenenniveau $|n\rangle$ ist also trotz des großen Wertes $\hbar\Gamma_n \approx 20 \text{ eV}$ nicht breit genug, um auch den Zustand $|f\rangle$ zu überdecken, da dieser um $\Delta E_{nf} \approx 250 \text{ eV}$ unter dem Zwischenenniveau liegt. In dem Bereich von Photonenenergien, bei denen die Zwei-Stufen-Prozesse gerade einzusetzen beginnen ($E_\nu \approx 0$), ist die Verstimmung also wesentlich größer als die Breite der Verteilung, so daß wir $\hbar\Gamma_n$ im Nenner von Gl. (6.25) vernachlässigen können.

Durch Einsetzen der Zahlenwerte in Gl. (6.25) erhält man als Rate für feld-induzierten L_{III} -Einfang von ^{163}Ho

$$\Gamma_{if}^{(2)} [\text{s}^{-1}] = 9 \cdot 10^{-37} I \left[\frac{\text{W}}{\text{cm}^2} \right] \sqrt{\frac{(\hbar\omega - 5.5)^2 - (m_\nu c^2)^2}{0.75^2 - (m_\nu c^2)^2}} \frac{\hbar\omega - 5.5}{(5.75 - \hbar\omega)^2 + 10^{-4}}.$$

Die Photonenenergie $\hbar\omega$ und die Neutrinomasse $m_\nu c^2$ sind hierbei in keV einzusetzen. Um beispielsweise pro 10^5 natürlicher M-Einfänge einen L_{III} -Einfang mit der sehr kleinen Neutrinoenergie von $E_\nu = \hbar\omega - \Delta E_{fi} = 10 \text{ eV}$ zu induzieren ($\Gamma_{if}^{(2)} = 10^{-5} \Gamma_{nf}^{(0)} = 6 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$), benötigt man ein Feld mit Photonenenergie $\hbar\omega \approx 5.5 \text{ keV}$ (entsprechend einer Wellenlänge von $\lambda \approx 2.2 \text{ \AA}$) und mit Intensität I bzw. Photonenfluß F von

$$I = 1 \cdot 10^{21} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}, \quad F = 1 \cdot 10^{36} \frac{1}{\text{s} \cdot \text{cm}^2}.$$

Hierbei wurde $m_\nu = 0$ angenommen. Ein Feld mit dieser extrem großen Intensität sollte außerdem durchstimmbar sein, damit man nicht nur aus der Energie, bei der der Zwei-Stufen-Prozeß erstmals stattfindet, sondern auch aus der Form, wie der photoinduzierte Elektroneneinfang als Funktion der Photonenenergie einsetzt, auf die Neutrinomasse schließen kann. Durch Auftragen der gemessenen Rate $\Gamma_{if}^{(2)}$ in der Form

$$\Gamma_{if}^{(2)} \frac{(\Delta E_{ni} - \hbar\omega)^2}{\hbar\omega - \Delta E_{fi}} \propto \sqrt{(\hbar\omega - \Delta E_{fi})^2 - (m_\nu c^2)^2}$$

kann man sofort m_ν bestimmen. Die spektrale Breite des Feldes bestimmt die Güte der Massenauflösung.

In Anbetracht der benötigten Feldintensität I und der sehr kleinen Übergangsrate $\Gamma_{if}^{(2)}$ scheidet der photoinduzierte Elektroneneinfang von ^{163}Ho derzeit wohl als potentieller Prozeß zur Bestimmung der Neutrinomasse aus. Kürzlich wurde von McGlinn [139] ebenfalls eine Rechnung zum feldinduzierten Elektroneneinfang veröffentlicht, die zu demselben Ergebnis führt. In dieser Arbeit wird völlig unabhängig von unseren Rechnungen der Feynman-Graph für feldinduzierten Elektroneneinfang in der relativistischen Theorie berechnet. Als numerisches Ergebnis wurde angegeben, daß für Photonen, deren Energie 100 eV oberhalb der Schwelle für photoinduzierten Elektroneneinfang liegt ($E_\gamma = \hbar\omega - \Delta E_{fi} = 100 \text{ eV}$), der Wirkungsquerschnitt $\sigma \sim 10^{-52} \text{ cm}^2$ beträgt. Dieses Ergebnis ist in sehr guter Übereinstimmung mit unserer Theorie, die

$$\sigma = \frac{\hbar\omega \Gamma_{if}^{(2)}}{I} = 1 \cdot 10^{-51} \text{ cm}^2 \quad (\hbar\omega = 5.6 \text{ keV})$$

liefert. Um den photoinduzierten Elektroneneinfang doch noch zur Bestimmung der Neutrinomasse auszunutzen, benötigt man einen Kern, bei dem der Endzustand innerhalb der natürlichen Breite des Zwischenzustandes liegt, so daß die Rate resonant verstärkt wird.

Ein weiterer Prozeß, der derzeit bei der Diskussion um die Neutrino-Ruhemasse eine große Rolle spielt, ist der neutrinolose doppelte Betazerfall [140]. Auch bei diesem Zerfall könnten photoinduzierte Prozesse von Interesse sein, da nach Absorption eines Photons geeigneter Energie beide Betaübergänge energetisch erlaubt wären. Dies würde zu einer großen Verstärkung der Zerfallsrate führen.

Kapitel VII

Zerfallsprozesse aufgrund der Kern-Feld-Wechselwirkung, Sättigungsbereich

In diesem Kapitel wird die Frage untersucht, wie groß die maximal erzielbare Rate für die Zwei-Stufen-Prozesse in Abb. 7 ist und welche Felder dazu benötigt werden. Während im letzten Abschnitt nur relativ schwache Felder betrachtet wurden, die störungstheoretisch behandelt werden konnten, soll in diesem Kapitel das äußere Feld exakt berücksichtigt werden. Teile dieses Kapitels sind bereits in Ref. 141 veröffentlicht.

7.1 Zerfallsraten

Wir wollen in diesem Kapitel annehmen, daß aufgrund des äußeren Feldes die Kopplung zwischen den Zuständen $|i\rangle$ und $|n\rangle$ stark ist, so daß in den Bewegungsgleichungen für die Übergangsamplituden die Rückkopplung von $|n\rangle$ nach $|i\rangle$ nicht mehr vernachlässigt werden kann, wie dies in Gl. (6.1) geschehen ist. Dagegen soll die Rückkopplung von $|f\rangle$ an $|i\rangle$ und $|n\rangle$ weiterhin vernachlässigt werden, da diese Übergänge schwach sind im Vergleich zu den stimulierten Übergängen $|i\rangle \leftrightarrow |n\rangle$. Wir wollen weiterhin annehmen, daß das äußere Feld fast in Resonanz mit dem Energieabstand zwischen $|n\rangle$ und $|i\rangle$ ist, so daß wir uns auf ein reines Drei-Niveau-System beschränken können, wie es in Abb. 7 dargestellt ist. Wir erhalten damit die modifizierten Bewegungsgleichungen im Wechselwirkungsbild

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= -\frac{i}{\hbar} \langle i|V|n\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_i)t} a_n \\ \dot{a}_n &= -\frac{i}{\hbar} \langle n|V|i\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(E_i-E_n)t} a_i \\ \dot{a}_f &= -\frac{i}{\hbar} \langle f|W|i\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(E_i-E_f)t} a_i - \frac{i}{\hbar} \langle f|W|n\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_f)t} a_n. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Hierbei wurde vorausgesetzt, daß die spontanen Zerfälle $|n\rangle \rightarrow |i\rangle$ durch Photonenemission oder innere Konversion vernachlässigbar sind im Vergleich zu den stimulierten Strahlungsprozessen. Damit ist $\langle n|V|i\rangle$ wieder ein

wohldefiniertes elektromagnetisches Multipol-Matrixelement oder auch die Summe mehrerer solcher Matrixelemente, die mit der Lebensdauer des Niveaus $|n\rangle$ bzgl. Zerfall nach $|i\rangle$ in Zusammenhang gebracht werden kann. Die Matrixelemente für den Übergang von $|i\rangle$ und $|n\rangle$ nach $|f\rangle$ sind durch $\langle f|W|i\rangle$ und $\langle f|W|n\rangle$ bezeichnet. Die Energien E_α bezeichnen wieder die Gesamtenergien des Zustandes $|\alpha\rangle$, d. h. die Energie des Kernes und des Strahlungsfeldes sowie evtl. der freien emittierten Teilchen.

Unter der Anfangsbedingung $a_n(0) = \delta_{ni}$ erhält man für das System ($|i\rangle, |n\rangle$) die wohlbekannte Rabi-Lösung [26]

$$a_i(t) = \frac{1}{2\mu} \left\{ (\Delta + \mu) e^{-\frac{i}{2}(\Delta - \mu)t} - (\Delta - \mu) e^{-\frac{i}{2}(\Delta + \mu)t} \right\} \quad (7.2)$$

$$a_n(t) = \frac{\langle n|V|i\rangle}{\hbar\mu} \left\{ e^{\frac{i}{2}(\Delta - \mu)t} - e^{\frac{i}{2}(\Delta + \mu)t} \right\},$$

wobei μ die Rabi-Frequenz bezeichnet

$$\mu = \sqrt{\Delta^2 + \left(2|\langle n|V|i\rangle|/\hbar\right)^2}. \quad (7.3)$$

Die Verstimmung Δ wurde in Gl. (6.23) eingeführt.

Durch Einsetzen von Gl. (7.2) in die Bewegungsgleichung für a_f (7.1) erhält man die Besetzungsrate des Endzustandes $|f\rangle$ zu

$$W_{if} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|a_f(T)|^2}{T}$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{|\langle f|W|i\rangle|}{2\mu} \right)^2 \left\{ (\Delta + \mu)^2 \delta\left(\Delta E_{if} + \frac{\hbar}{2}(\Delta - \mu) - E_s\right) + (\Delta - \mu)^2 \delta\left(\Delta E_{if} + \frac{\hbar}{2}(\Delta + \mu) - E_s\right) \right\} \quad (7.4)$$

$$+ \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{|\langle f|W|n\rangle| |\langle n|V|i\rangle|}{\hbar\mu} \right)^2 \left\{ \delta\left(\Delta E_{nf} - \frac{\hbar}{2}(\Delta - \mu) - E_s\right) + \delta\left(\Delta E_{nf} - \frac{\hbar}{2}(\Delta + \mu) - E_s\right) \right\}.$$

Die Größen $\Delta E_{\alpha\beta}$, E_s , usw. wurden bereits im letzten Kapitel eingeführt. Der erste Term in Gl. (7.4) beschreibt den direkten Zerfall $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$, während der zweite Term den Zerfall über den Zwischenzustand $|n\rangle$ beschreibt, der durch resonante Anregung (für $\Delta \rightarrow 0$ wird μ sehr klein) verstärkt werden kann.

In der sog. Schwachfeld-Näherung $|\Delta| \gg 2|\langle n|V|i\rangle|/\hbar$ reduziert sich Gl. (7.4) auf das Ergebnis der zweiten Ordnung Störungstheorie (6.3). Umgekehrt sieht man aus diesem Grenzübergang, daß man bei resonanter Anregung $\Delta = 0$ Gl. (7.4) und nicht das störungstheoretische Resultat (6.3) verwenden sollte, das für $\Delta \rightarrow 0$ divergiert.

Die totale Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für Übergänge in den Endzustand $|f\rangle$ erhält man aus Gl. (7.4) durch Integration über den Phasenraum der emittierten Teilchen. Für Gammazerfall und Elektroneneinfang ergibt dies

$$\begin{aligned} \Gamma_{if} = & \frac{1}{\pi c^3 \hbar^4} \left(\frac{|\langle f|W|i\rangle|}{Z_\mu} \right)^2 \left\{ (\Delta + \mu)^2 \left(\Delta E_{if} + \frac{\hbar}{2}(\Delta - \mu) \right)^2 + (\Delta - \mu)^2 \left(\Delta E_{if} + \frac{\hbar}{2}(\Delta + \mu) \right)^2 \right\} \\ & + \frac{1}{\pi c^3 \hbar^4} \left(\frac{|\langle f|W|n\rangle| |\langle n|V|i\rangle|}{\hbar \mu} \right)^2 \left\{ \left(\Delta E_{nf} - \frac{\hbar}{2}(\Delta - \mu) \right)^2 + \left(\Delta E_{nf} - \frac{\hbar}{2}(\Delta + \mu) \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7.5a)$$

Beim Gammazerfall enthält Γ_{if} einen zusätzlichen Faktor 2 aufgrund der Summation über die Polarisierungen. Für β^+ - und β^- -Zerfall hat die Übergangsrate die Form ($W = gV_\beta$)

$$\begin{aligned} \Gamma_{if} = & \frac{mc^2}{2\pi^3 \hbar} \left(\frac{G |\langle f|V_\beta|i\rangle|}{Z_\mu} \right)^2 \left\{ (\Delta + \mu)^2 F\left(\frac{\Delta E_{if} + \frac{\hbar}{2}(\Delta - \mu)}{mc^2}\right) + (\Delta - \mu)^2 F\left(\frac{\Delta E_{if} + \frac{\hbar}{2}(\Delta + \mu)}{mc^2}\right) \right\} \\ & + \frac{mc^2}{2\pi^3 \hbar} \left(\frac{G |\langle f|V_\beta|n\rangle| |\langle n|V|i\rangle|}{\hbar \mu} \right)^2 \left\{ F\left(\frac{\Delta E_{nf} - \frac{\hbar}{2}(\Delta - \mu)}{mc^2}\right) + F\left(\frac{\Delta E_{nf} - \frac{\hbar}{2}(\Delta + \mu)}{mc^2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.5b)$$

Bei erlaubtem Betazerfall ist der Phasenraum-Faktor F wieder durch Gl. (6.30) gegeben.

Wie in Kapitel VI werden wir nun die in Gl. (7.5) auftretenden Matrixelemente durch natürliche Zerfallsraten ersetzen. Für den Gammazerfall kann Γ_{if} unter Verwendung von Gl. (6.15) und (6.28) geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \Gamma_{if} = & \frac{\Gamma_{if}^{(0)}}{1 + \alpha_{if}} \left\{ \left(\frac{\Delta + \mu}{2\mu} \right)^2 \left(\frac{\Delta E_{if} + \frac{\hbar}{2}(\Delta - \mu)}{\Delta E_{if}} \right)^{2l_{if}+1} + \left(\frac{\Delta - \mu}{2\mu} \right)^2 \left(\frac{\Delta E_{if} + \frac{\hbar}{2}(\Delta + \mu)}{\Delta E_{if}} \right)^{2l_{if}+1} \right\} \\ & + \frac{\pi c^2}{2\hbar} \frac{\Gamma_{ni}^{(0)} \Gamma_{nf}^{(0)}}{(1 + \alpha_{ni})(1 + \alpha_{nf})} \frac{I}{\omega^3 \mu^2} \left(\frac{\hbar \omega}{\Delta E_{ni}} \right)^{2l_{ni}+1} \left\{ \left(\frac{\Delta E_{nf} - \frac{\hbar}{2}(\Delta - \mu)}{\Delta E_{nf}} \right)^{2l_{nf}+1} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\Delta E_{nf} - \frac{\hbar}{2}(\Delta + \mu)}{\Delta E_{nf}} \right)^{2l_{nf}+1} \right\}. \end{aligned} \quad (7.6a)$$

Für Elektroneneinfang erhält man aus Gl. (6.15) und (6.35)

$$\begin{aligned} \Gamma_{if} = & \Gamma_{if}^{(0)} \left\{ \left(\frac{\Delta + \mu}{2\mu} \right)^2 \left(\frac{\Delta E_{if} + \frac{\hbar}{2}(\Delta - \mu)}{\Delta E_{if}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta - \mu}{2\mu} \right)^2 \left(\frac{\Delta E_{if} + \frac{\hbar}{2}(\Delta + \mu)}{\Delta E_{if}} \right)^2 \right\} \\ & + \frac{\pi c^2}{2\hbar} \frac{\Gamma_{ni}^{(0)} \Gamma_{nf}^{(0)}}{1 + \alpha_{ni}} \frac{I}{\omega^3 \mu^2} \left(\frac{\hbar \omega}{\Delta E_{ni}} \right)^{2l_{ni}+1} \left\{ \left(\frac{\Delta E_{nf} - \frac{\hbar}{2}(\Delta - \mu)}{\Delta E_{nf}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta E_{nf} - \frac{\hbar}{2}(\Delta + \mu)}{\Delta E_{nf}} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (7.6b)$$

und für Betazerfall aus Gl. (6.15) und (6.31)

$$\begin{aligned} \Gamma_{if} = & \Gamma_{if}^{(0)} \left\{ \left(\frac{\Delta + \mu}{2\mu} \right)^2 \frac{F\left(\frac{\Delta E_{if} + \frac{\hbar}{2}(\Delta - \mu)}{mc^2}\right)}{F\left(\frac{\Delta E_{if}}{mc^2}\right)} + \left(\frac{\Delta - \mu}{2\mu} \right)^2 \frac{F\left(\frac{\Delta E_{if} + \frac{\hbar}{2}(\Delta + \mu)}{mc^2}\right)}{F\left(\frac{\Delta E_{if}}{mc^2}\right)} \right\} \\ & + \frac{\pi c^2}{2\hbar} \frac{\Gamma_{ni}^{(0)} \Gamma_{nf}^{(0)}}{1 + \alpha_{ni}} \frac{I}{\omega^3 \mu^2} \left(\frac{\hbar \omega}{\Delta E_{ni}} \right)^{2l_{ni}+1} \left\{ \frac{F\left(\frac{\Delta E_{nf} - \frac{\hbar}{2}(\Delta - \mu)}{mc^2}\right)}{F\left(\frac{\Delta E_{nf}}{mc^2}\right)} + \frac{F\left(\frac{\Delta E_{nf} - \frac{\hbar}{2}(\Delta + \mu)}{mc^2}\right)}{F\left(\frac{\Delta E_{nf}}{mc^2}\right)} \right\}. \end{aligned} \quad (7.6c)$$

7.2 Starkfeld-Näherung

Wir wollen nun Gl. (7.6) in zwei Grenzfällen betrachten. In der Näherung schwacher Felder bzw. großer Verstimmung

$$\hbar |\Delta| \gg 2 |\langle n|V|i \rangle| \quad (7.7)$$

reduziert sich die Rabi-Frequenz auf $\mu \approx \Delta$. Aus Gl. (7.6) kann man entnehmen, daß dann der direkte Zerfallsprozeß $\Gamma_{if}^{(1)}$ praktisch mit derselben Rate abläuft wie ohne äußeres Feld

$$\Gamma_{if}^{(1)} \approx \Gamma_{if}^{(0)} \quad \text{bzw.} \quad \Gamma_{if}^{(1)} \approx \frac{\Gamma_{if}^{(0)}}{1 + \alpha_{if}} \quad \text{bei Gammazerfall,}$$

während wir für den Zwei-Stufen-Prozeß $|i\rangle \rightarrow |n\rangle \rightarrow |f\rangle$ wieder für alle drei Zerfallsmoden das Ergebnis $\Gamma_{if}^{(2)}$ (6.25) der Störungstheorie erhalten.

Wir sind in diesem Abschnitt an dem entgegengesetzten Grenzfall sehr kleiner Verstimmung bzw. sehr starker Felder

$$\hbar |\Delta| \ll 2 |\langle n|V|i \rangle| \quad (7.8)$$

interessiert, da uns dies die größtmögliche Rate für die indirekten Prozesse über den Zwischenzustand $|n\rangle$ liefern wird. In dieser sog. Starkfeld-Näherung reduziert sich die Rabi-Frequenz auf

$$\mu \approx \frac{2|V_{in}|}{\hbar} \gg |\Delta|, \quad V_{in} \equiv \langle n|V|i \rangle.$$

Damit erhalten wir für den Gammazerfall im Starkfeld-Bereich

$$\begin{aligned} \Gamma_{if} &= \frac{1}{4} \frac{\Gamma_{if}^{(0)}}{1 + \alpha_{if}} \frac{(\Delta E_{if} + |V_{in}|)^{2l_{if}+1} + (\Delta E_{if} - |V_{in}|)^{2l_{if}+1}}{(\Delta E_{if})^{2l_{if}+1}} \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\Gamma_{nf}^{(0)}}{1 + \alpha_{nf}} \frac{(\Delta E_{nf} + |V_{in}|)^{2l_{nf}+1} + (\Delta E_{nf} - |V_{in}|)^{2l_{nf}+1}}{(\Delta E_{nf})^{2l_{nf}+1}}. \end{aligned} \quad (7.9a)$$

Für den Elektroneneinfang gilt ebenfalls Gl. (7.9a), wenn man

$$\alpha_{ij} = \alpha_{nj} = 0, \quad 2l_{ij} + 1 = 2l_{nj} + 1 = 2 \quad (7.9b)$$

setzt. Für den Betazerfall ergibt sich

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij} = & \frac{1}{4} \Gamma_{ij}^{(0)} \frac{F\left(\frac{\Delta E_{ij} + |V_{in}|}{mc^2}\right) + F\left(\frac{\Delta E_{ij} - |V_{in}|}{mc^2}\right)}{F\left(\frac{\Delta E_{ij}}{mc^2}\right)} \\ & + \frac{1}{4} \Gamma_{nj}^{(0)} \frac{F\left(\frac{\Delta E_{nj} + |V_{in}|}{mc^2}\right) + F\left(\frac{\Delta E_{nj} - |V_{in}|}{mc^2}\right)}{F\left(\frac{\Delta E_{nj}}{mc^2}\right)}. \end{aligned} \quad (7.9c)$$

In dem Starkfeld-Bereich ist das Zwei-Niveau-System ($|i\rangle, |n\rangle$) gesättigt. Das System oszilliert zwischen beiden Niveaus, $|i\rangle$ und $|n\rangle$ sind gleich stark besetzt. Die Übergangsrate hängt nicht mehr wie in Gl. (7.6) von $\Gamma_{ni}^{(0)}$ und damit von der Stärke der Kopplung zwischen $|i\rangle$ und $|n\rangle$ ab.

Solange sich die Verstimmung Δ in der Größenordnung der natürlichen Breite Γ_n des angeregten Niveaus $|n\rangle$ bewegt, ist das Übergangsmatrixelement $|V_{in}|$ auch im Starkfeld-Bereich (7.8) für alle realistischen Kernniveauschemata klein gegen die Energieabstände ΔE_{if} und ΔE_{nf} . Damit reduziert sich die Zerfallsrate auf

$$\Gamma_{ij} \approx \frac{1}{2} (\Gamma_{ij}^{(0)} + \Gamma_{nj}^{(0)}) \quad , \quad \Gamma_{ij}^{(1)} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma_{ij}^{(0)}}{1 + \alpha_{ij}} + \frac{\Gamma_{nj}^{(0)}}{1 + \alpha_{nj}} \right). \quad (7.10)$$

Der direkte Zerfall $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ ist also um einen Faktor 2 im Vergleich zum feldfreien Zerfall reduziert

$$\Gamma_{ij}^{(1)} \approx \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^{(0)} \quad ,$$

während der indirekte Zerfall über $|n\rangle$ mit der halben Rate des spontanen Zerfalls $|n\rangle \rightarrow |f\rangle$ stattfindet:

$$\Gamma_{ij}^{(2)} \approx \frac{1}{2} \Gamma_{nj}^{(0)}.$$

Das Verzweungsverhältnis zwischen Ein- und Zwei-Stufen-Prozessen ist demnach im Starkfeld-Bereich durch das Verhältnis der natürlichen Lebensdauern $\Gamma_{if}^{(0)}$ und $\Gamma_{nf}^{(0)}$ gegeben. Die Verstärkung des Zerfalls des Zustandes

$|i\rangle$ aufgrund des äußeren Feldes beträgt

$$R = \frac{\Gamma_{if}}{\Gamma_{if}^{(0)}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Gamma_{ni}^{(0)}}{\Gamma_{if}^{(0)}} \right) . \quad (7.11)$$

Für den speziellen Fall, daß der Zerfall $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ aufgrund von Auswahlregeln verboten, der Zerfall $|n\rangle \rightarrow |f\rangle$ aber erlaubt ist, oder falls der Phasenraum für den Zerfall $|n\rangle \rightarrow |f\rangle$ wesentlich größer ist als für $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$, ist $\Gamma_{nf}^{(0)} \gg \Gamma_{if}^{(0)}$ und damit

$$R \approx \frac{\Gamma_{ni}^{(0)}}{2 \Gamma_{if}^{(0)}} . \quad (7.12)$$

Für $\Gamma_{nf}^{(0)} \gg \Gamma_{if}^{(0)}$ erhält man also die maximal mögliche Verstärkung des Zerfalls von $|i\rangle$ bei Sättigung des Zwei-Niveau-Systems ($|i\rangle, |n\rangle$). Der Kern kann dann mit der halben Zerfallsrate $\Gamma_{nf}^{(0)}$ des angeregten Zustandes $|n\rangle$ in den Endzustand zerfallen. Der Starkfeldbereich ist von besonderem Interesse für die Kernspektroskopie, da gemäß Gl. (7.10) eine Messung von Γ_{if} direkt $\Gamma_{nf}^{(0)}$ und damit das Matrixelement $|\langle f|W|n\rangle|^2$ liefert. Dieses Matrixelement kann normalerweise in natürlichen Zerfallsketten nicht beobachtet werden.

7.3 Zerfallsdämpfung

In diesem Abschnitt soll der Formalismus aus Abschnitt 6.2 auf den Fall starker Felder, bei denen die Rückkopplung von $|n\rangle$ nach $|i\rangle$ berücksichtigt werden muß, angewandt werden. Die Rechnungen werden wieder den zeitlichen Verlauf der Übergangswahrscheinlichkeit liefern und aufgrund der phänomenologischen Berücksichtigung der spontanen Zerfälle zu Effekten führen, die im letzten Abschnitt nicht berücksichtigt werden konnten.

In Analogie zu Gl. (6.21) haben die Bewegungsgleichungen bei exakter Kopplung zwischen $|i\rangle$ und $|n\rangle$ die Form

$$\dot{a}_i = -\frac{1}{2} \Gamma_i a_i - \frac{i}{\hbar} \langle i|V|n\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_i)t} a_n \quad (7.13)$$

$$\dot{a}_n = -\frac{1}{2} \Gamma_n a_n - \frac{i}{\hbar} \langle n|V|i\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(E_i - E_n)t} a_i .$$

Die Raten Γ_i und Γ_n bezeichnen die Raten für Zerfall aus dem Zwei-Niveau-System ($|i\rangle, |n\rangle$)

$$\Gamma_i = \sum_{\alpha < i} \Gamma_{i\alpha}, \quad \Gamma_n = \sum_{\substack{\alpha < n \\ \alpha \neq i}} \Gamma_{n\alpha}.$$

Der spontane Zerfall von $|n\rangle$ nach $|i\rangle$ ist in dem Gleichungssystem (7.13) nicht enthalten, da in der Gleichung für a_i kein entsprechender Pumpterm berücksichtigt wurde. Durch die Rückkopplung von $|n\rangle$ an $|i\rangle$ wird nur der spontane Zerfall unter Aussendung eines Photons in eine einzige spezielle Mode, die Mode des äußeren Feldes, erfaßt. Das Gleichungssystem (7.13) ist also nur anwendbar, wenn man die spontanen Zerfälle $|n\rangle \rightarrow |i\rangle$, sowohl durch Photonenemission als auch durch innere Konversion, vernachlässigen kann. Die Rechnungen dieses Abschnittes können somit auf das Beispiel in Abb. 8 angewandt werden, bei dem $\Gamma_{nf} \gg \Gamma_{ni}$ ist, nicht jedoch auf Betazerfälle, bei denen in der Regel $\Gamma_{nf} \ll \Gamma_{ni}$ ist. Wir können die in Gl. (7.13) enthaltene Näherung auch so interpretieren, daß die inelastische Raman-Streuung wesentlich stärker sein soll als die Resonanzfluoreszenz zu dem Endzustand $|f\rangle$.

Durch Lösung des Gleichungssystems (7.13) erhält man die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Zwischenzustand $|n\rangle$

$$|a_n(t)|^2 = 4 \frac{|\langle i|V|n\rangle|^2}{\hbar^2 \mu \mu^*} e^{-\gamma t} \sin \frac{\mu}{2} t \sin \frac{\mu^*}{2} t. \quad (7.14)$$

Die Rabi-Frequenz μ ist jetzt komplex

$$\mu = \sqrt{(\Delta + i\delta)^2 + (2|\langle i|V|n\rangle|/\hbar)^2}, \quad (7.15)$$

wobei die Größen Δ , δ und γ in Gl. (6.23) definiert wurden.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bis zur Zeit T der Endzustand $|f\rangle$ via Zwischenzustand $|n\rangle$ besetzt wird, ist

$$\begin{aligned} P_{if}^{(2)}(T) &= \Gamma_{nf}(\Delta E_{if} + \hbar\omega) \int_0^T dt |a_n(t)|^2 \\ &= \frac{\frac{1}{2} \Gamma_{nf}(\Delta E_{if} + \hbar\omega) \gamma I_0}{\Delta^2 + \gamma^2 (1 + I_0)} \left\{ 1 - \frac{e^{-\gamma T}}{2\gamma\mu\mu^*} \left[\left\{ \left(\frac{\mu + \mu^*}{2} \right)^2 + \gamma^2 \right\} \left\{ e^{i\frac{\mu - \mu^*}{2}T} \left(i\frac{\mu - \mu^*}{2} + \gamma \right) \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + e^{-i\frac{\mu - \mu^*}{2}T} \left(-i\frac{\mu - \mu^*}{2} + \gamma \right) \right\} - \left\{ \left(\frac{\mu - \mu^*}{2} \right)^2 + \gamma^2 \right\} \left\{ e^{i\frac{\mu + \mu^*}{2}T} \left(i\frac{\mu + \mu^*}{2} + \gamma \right) + e^{-i\frac{\mu + \mu^*}{2}T} \left(-i\frac{\mu + \mu^*}{2} + \gamma \right) \right\} \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Hierbei wurde die dimensionslose Intensität I_0 eingeführt

$$I_0 = \frac{4|\langle i|V|n \rangle|^2}{\hbar^2 \Gamma_i \Gamma_n} = \frac{2\pi c^2}{\hbar} \frac{I}{\omega^3} \left(\frac{\hbar \omega}{\Delta E_{ni}} \right)^{2l_{ni}+1} \frac{\Gamma_{ni}^{(0)}}{(1+\alpha_{ni})\Gamma_i \Gamma_n} \quad (7.17)$$

Für den zweiten Teil dieser Gleichung wurde Gl. (6.15) ausgenutzt.

Ein Vergleich zwischen Gl. (6.24) und (7.16) zeigt, daß in der Schwachfeld-Näherung (6.24) die Besetzungswahrscheinlichkeit $P_{if}^{(2)}(T)$ des Zustandes $|f\rangle$ erst für Zeiten, die größer sind als die auftretenden Lebensdauern Γ_i^{-1} und Γ_n^{-1} , ihren maximalen Wert erreicht. Falls beispielsweise $\Gamma_n \gg \Gamma_i$ ist, so erreicht $P_{if}^{(2)}(T)$ erst für $T > \Gamma_i^{-1}$ den stationären, asymptotischen Wert. Dagegen ist aus Gl. (7.16) ersichtlich, daß im Starkfeld-Bereich $P_{if}^{(2)}$ auf der Zeitskala γ^{-1} seinen asymptotischen Wert erreicht, falls die Rabi-Frequenz reell ist. Für $\Gamma_i \ll \Gamma_n$ erreicht die Besetzungswahrscheinlichkeit von $|f\rangle$ aufgrund von Zerfällen von $|n\rangle$ bereits für $T > 2\Gamma_n^{-1}$ ihren endgültigen Wert.

In der Schwachfeld-Näherung

$$\left(\frac{2|V_{ni}|}{\hbar} \right)^2 \ll \text{Min}(\Delta^2, \delta^2, \Gamma_i \Gamma_n) \quad (7.18)$$

haben wir $\mu \approx \Delta + i\delta$, $I_0 \ll 1$ und Gl. (7.16) liefert wieder das Ergebnis (6.24) der Störungstheorie. Bei resonanter Anregung $\Delta \approx 0$ ist die Rabi-Frequenz im Grenzfall schwacher Felder rein imaginär, die Rabi-Oszillationen sind sehr stark gedämpft.

Der Grenzfall sehr starker Felder ist charakterisiert durch die Bedingung

$$\left(\frac{2|V_{ni}|}{\hbar} \right)^2 \gg \text{Max}(\Delta^2, \delta^2, \Gamma_i \Gamma_n) \quad (7.19)$$

In diesem Fall ist $I_0 \gg 1$. Bei resonanter Anregung $\Delta \approx 0$ wird die Rabi-Frequenz reell ($\mu \approx 2|V_{ni}|/\hbar$), das System oszilliert praktisch ungedämpft zwischen den beiden Niveaus $|i\rangle$ und $|n\rangle$, und der Zustand $|i\rangle$ zerfällt nun mit der schnellen Rate $\gamma \approx \Gamma_n/2$ über $|n\rangle$ nach $|f\rangle$. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Prozeß hat den asymptotischen Wert

$$P_{if}^{(2)}(T) = \frac{\Gamma_n}{\Gamma_n + \Gamma_i} \left(T \gg \gamma^{-1} \approx 2\Gamma_n^{-1}, \Delta \approx 0 \right). \quad (7.20)$$

Wir erhalten nun also in Gl. (7.19) zusätzlich zu Gl. (7.8) zwei weitere Bedingungen für den Starkfeld-Bereich. Das Übergangsmatrixelement muß nicht nur groß sein gegenüber der Verstimmung $\hbar\Delta$, sondern auch gegenüber den Kombinationen $\hbar\delta$ und $\hbar\sqrt{\Gamma_i\Gamma_n}$ der Zerfallsraten Γ_i und Γ_n . Bei resonanter Anregung bedeutet die Bedingung (7.19), daß während der natürlichen Zerfallszeit $|\Gamma_i - \Gamma_n|^{-1}$ viele Rabi-Oszillationen stattfinden müssen.

7.4 Beispiele

In diesem Abschnitt wollen wir die für den Starkfeld-Bereich benötigte Intensität und Monochromasie des äußeren Feldes für die Beispiele aus Kapitel VI berechnen. Mit Hilfe von Gl. (6.15) kann die Starkfeld-Bedingung (7.19) auch geschrieben werden als

$$\frac{I}{W^2} \gg \frac{(\hbar\omega)^3}{2\pi c^2 \hbar^4} \left(\frac{\Delta E_{ni}}{\hbar\omega} \right)^{2l_{ni}+1} \frac{1+\alpha_{ni}}{\Gamma_{ni}^{(0)}}, \quad (7.21)$$

wobei W als Abkürzung für

$$W \equiv \text{Max} \left\{ |\Delta E_{ni} - \hbar\omega|, \frac{\hbar}{2} |\Gamma_i - \Gamma_n|, \hbar\sqrt{\Gamma_i\Gamma_n} \right\} \quad (7.22)$$

steht. In einem möglichen Experiment wird man die Frequenz des äußeren Feldes so nahe wie möglich auf die Resonanz einstellen, $\Delta E_{ni} \approx \hbar\omega$. Wir wollen dann $\Delta E_{ni} - \hbar\omega$ durch die Bandbreite $\hbar\Delta\omega$ des äußeren Feldes ersetzen. Die Starkfeld-Bedingung lautet bei resonanter Anregung

$$\frac{I}{W^2} \gg \frac{1+\alpha_{ni}}{2\pi c^2 \hbar^4} \frac{\Delta E_{ni}^3}{\Gamma_{ni}^{(0)}}, \quad W = \hbar \text{Max} \left\{ \Delta\omega, \frac{|\Gamma_i - \Gamma_n|}{2}, \sqrt{\Gamma_i\Gamma_n} \right\}. \quad (7.23)$$

Um den Sättigungsbereich mit möglichst geringer Intensität zu erreichen, benötigt man (i) einen Kern mit einem möglichst starken Übergangsmatrixelement $\langle i|V|n\rangle$, d. h. mit möglichst kurzer Zerfallszeit $1/\Gamma_{ni}^{(0)}$ und möglichst kleinem Energieabstand ΔE_{ni} , sowie (ii) ein Feld mit extrem guter

Monochromasie $\Delta\omega$, die möglichst geringer als die Breite Γ_n des angeregten Niveaus sein soll.

In den folgenden Beispielen soll W durch die natürliche Breite $\hbar\Gamma_n = \sum_{\alpha < n} \hbar\Gamma_{n\alpha}$ des angeregten Niveaus abgeschätzt werden. Die folgende Tabelle liefert für die 4 Beispiele aus Abb. 8 - 10 die für den Sättigungsbereich benötigte Intensität I , den Photonenfluß F sowie die Monochromasie $\Delta\omega/\omega$. Die benötigte Monochromasie folgt aus der Bedingung, daß die Feld-Bandbreite kleiner als die natürliche Breite des Zwischenzustandes sein soll, $\Delta\omega \lesssim \Gamma_n = W/\hbar$.

	$I [\frac{W}{\text{cm}^2}]$	$F [\frac{1}{\text{s cm}^2}]$	$\frac{\Delta\omega}{\omega}$	α_{ni}
$^{111}_{46}\text{Pd}$	$1 * 10^{19}$	$2 * 10^{32}$	$9 * 10^{-11}$	$1 * 10^{-3}$
$^{129}_{53}\text{J}$	$2 * 10^{12}$	$4 * 10^{26}$	$1 * 10^{-12}$	$3 * 10^1$
$^{137}_{57}\text{La}$	$4 * 10^{11}$	$2 * 10^{26}$	$5 * 10^{-12}$	$6 * 10^2$
$^{138}_{57}\text{La}$	$9 * 10^{11}$	$8 * 10^{25}$	$6 * 10^{-14}$	6

In der letzten Spalte wurden die aus Ref. 96 entnommenen Konversionskoeffizienten angegeben. Die Tabelle gibt die Mindestwerte für I , F und $\Delta\omega$ an, für die die Ungleichung (7.23) erfüllt ist. Mit noch größeren Intensitäten ist keine wesentliche Beschleunigung des Zerfalls mehr möglich.

Die Bedingungen für den Sättigungsbereich sind sehr streng. Besonders extrem ist die verlangte spektrale Reinheit des exakt resonanten Feldes. Bei unseren Beispielen liegt die Verstimmung bzw. die Bandbreite im Bereich $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-10} - 10^{-14}$. Aus Gl. (7.21) ist jedoch ersichtlich, daß man auf Kosten der Intensität auch breitbandigere Quellen verwenden kann. Die benötigte Intensität wächst mit dem Quadrat von Δ bzw. $\Delta\omega$ an.

In dem Starkfeld-Bereich zerfällt der isomere Zustand $|i\rangle$ nach Gl. (7.12) mit der halben Rate des angeregten Zustandes $\Gamma_{nf}^{(0)}/2$. Für ^{111m}Pd , dessen natürliche Lebensdauer für Gammazerfall 7.7 h beträgt, genügt also ein Puls von etwa 0.1 ns, um alle bestrahlten Kerne zerfallen zu lassen. Bei Betazerfall und Elektroneneinfang benötigt man größere Bestrahlungszeiten, da auch bei erlaubten Zerfällen $|n\rangle \rightarrow |f\rangle$ aufgrund der kleinen Kopplungskonstanten der schwachen Wechselwirkung $\Gamma_{nf}^{(0)}$ kleiner ist als beim Gammazerfall. Andererseits wird bei allen drei Beispielen für Betazerfall der Grad der Verbotenheit um zwei Ordnungen aufgehoben, so daß eine beträchtliche Verstärkung des Zerfalls bereits mit Feldern zu erwarten ist, für die I/W^2 klein ist im Vergleich zu der Starkfeld-Bedingung (7.21). Die günstigsten Voraussetzungen für eine große Verstärkung bestehen immer dann, wenn das äußere Feld genau in Resonanz und so schmalbandig ist, daß die Energieverschmierung des Pulses kleiner als die natürliche Breite des Zwischenniveaus $|n\rangle$ ist.

Kapitel VIII

Schlußfolgerungen und Ausblick

Das Problem, Prozesse, die in einem Atomkern ablaufen, durch äußere Einwirkungen zu beeinflussen, ist nicht nur von großem Interesse für die Grundlagenforschung, sondern eröffnet auch bedeutende technische Anwendungsmöglichkeiten und stellt eine außergewöhnliche Herausforderung für Experimentatoren dar. In dieser Arbeit wurde der Zerfall von Atomkernen in intensiven Strahlungsfeldern betrachtet. Es wurde untersucht, welche Effekte durch das äußere Feld induziert werden können und welche Feldparameter dazu benötigt werden. Dabei wurde gefunden, daß mit Feldern, die heute experimentell erzeugt werden können, eine Beschleunigung von Kernzerfällen nicht zu erwarten ist.

Kernzerfälle in langwelligen Feldern (d.h. Photonenenergie $\ll$ nukleare Übergangsenergie) liegen im Grenzbereich zwischen klassischer und Quantenphysik. Da nur sehr intensive Felder betrachtet werden, kann das Strahlungsfeld immer klassisch behandelt werden. Quantenmechanische Feldeffekte treten also nur auf bei exakter Berücksichtigung der quantenmechanischen Bewegung der Teilchen im äußeren Feld. Klassisch wird der eigentliche Kernzerfall durch das äußere Feld nicht beeinflußt und nur die emittierten geladenen Teilchen wechselwirken nach dem Zerfall mit dem äußeren Feld. Die Zerfallsprodukte werden also instantan mit derselben Energie und demselben Impuls in das äußere Feld emittiert wie im feldfreien Fall in das Vakuum. Dieser klassische Bereich ist durch $\tilde{\gamma}^2 \gg 1$ (2.37) sowie die Bedingungen (4.40) - (4.42) bestimmt. Die klassische Beschreibung ist demnach zulässig, wenn sowohl die Feldstärke E_0 klein ist gegen $(Q/mc^2)^{3/2} E_C$ und $(x_C/R)(\Delta E/mc^2) E_C$ als auch die Photonenenergie $\hbar\omega$ gegen den Q-Wert des Zerfalls ($E_C = 1.3 \cdot 10^{16}$ V/cm, Q und ΔE bezeichnen die freigesetzte Energie bzw. eine nukleare Anregungsenergie). Damit liegen Kernprozesse auch bei den intensivsten im Labor erzeugbaren Laser- ($E_0/E_C \lesssim 10^{-6}$) und längerwelligen Feldern in dem klassischen Bereich.

Für den nuklearen Betazerfall in einem intensiven langwelligen Feld kann man sich zunächst auf die Wechselwirkung im Endzustand beschränken, d. h. man berücksichtigt die Wechselwirkung zwischen Feld und emittiertem Elektron exakt, während die Wechselwirkung zwischen Feld und Kern vernachlässigt wird. Die Elektronen-Wellenfunktion enthält dann Multiphoton-Prozesse sehr hoher Ordnung (für Laser bis zu 10^6 Terme). In dem klassischen Bereich (4.40) - (4.42) erhält man mit dieser Elektronen-Wellenfunktion eine Übergangsrate, die auch aus der feldfreien Übergangsrate abgeleitet werden kann, wenn man die feldfreie Elektronenenergie durch die klassische Energie im Feld ersetzt. Der Zerfall im äußeren Feld kann also abgeleitet werden aus dem Zerfall ohne

äußeres Feld und der klassischen Teilchen-Feld-Wechselwirkung. Diese Aufspaltung war bisher nicht bekannt.

Das Energiespektrum und die Winkelverteilung der emittierten Elektronen zeigen große Feldeffekte, sobald der Wechselwirkungsparameter ν (1.1) im Bereich $\nu \gtrsim 1$ liegt. So können die Elektronen durch das Feld stark beschleunigt werden, was zu einer beträchtlichen Verbreiterung der Energieverteilung außerhalb des Feldes führt. Außerdem kommen sie nicht isotrop aus dem äußeren Feld heraus, sondern in einem kleinen Raumwinkel, der mit wachsender Feldstärke immer schmaler wird. Für $\nu \gg 1$ erhält man außerhalb des Feldes einen scharf fokussierten Strahl energetisch breit verteilter Elektronen, der mit der Feldfrequenz um die Feldrichtung präzediert. Dies sind klassische Effekte, die durch den klassischen Parameter ν bestimmt werden. Sie beruhen also auf der klassischen Beschleunigung und Ablenkung der Elektronen im Feld, nachdem der Zerfall bereits stattgefunden hat. Wenn die Bewegung des Elektrons im äußeren Feld voll quantenmechanisch beschrieben wird, müssen alle Multiphoton-Wechselwirkungen bis zu extrem hohen Ordnungen berücksichtigt werden. Für die differentiellen Raten ist eine störungstheoretische Behandlung ausgeschlossen. Die Feldeffekte in den Elektronenverteilungen sollten sich relativ einfach experimentell nachweisen lassen. Dazu sind intensive Radiofelder geeignet, da ν für längerwellige Felder sehr groß werden kann.

Feldeinflüsse auf die totale Zerfallsrate beruhen dagegen nur auf Quanteneffekten. Im klassischen Bereich bleibt die Lebensdauer eines radioaktiven Kerns unbeeinflusst. Nach obiger Beschreibung der Energie- und Winkelverteilung im äußeren Feld ist zwar klar, daß die Phasenräume für Vakuumzerfall und Zerfall im Feld völlig verschiedene Gestalt haben, ihre Größe bleibt jedoch erhalten. Dieses Ergebnis kann ganz allgemein für beliebige Felder in Form eines Theorems formuliert werden: im quasiklassischen Grenzfall ist die totale Zerfallsrate oder der totale Wirkungsquerschnitt unabhängig von einem äußeren Feld, solange nur der Einfluß des Feldes auf geladene Teilchen im Endzustand berücksichtigt wird. Die Wellenfunktion dieser geladenen Teilchen im Endzustand enthält zwar eine sehr große Anzahl von "Seitenbändern" im Vergleich zum feldfreien Fall, doch wird dafür die Komponente der Wellenfunktion, die dieselbe Energie wie im feldfreien Fall hat, so geschwächt, daß man nach Summation über alle Multiphotonterme wieder dieselbe totale Zerfallsrate erhält wie im feldfreien Fall.

Zur Bestimmung der Feldeffekte auf die totale Zerfallsrate müssen die Quantenkorrekturen berechnet werden. Dies ist in dieser Arbeit erstmals auch für verbotene Zerfälle geschehen. Die Quantenkorrekturen hängen nicht von v , sondern von E_0/E_c ab (die kritische Feldstärke E_c ist eine quantenmechanische Größe). Der Einfluß des äußeren Feldes läßt sich durch die Operatoren (4.36) und (4.37) ausdrücken, die auf die feldfreie Rate wirken. Interessanterweise können diese Operatoren für $E_0 \ll (Q/mc^2)^{3/2} E_c$ in eine rasch konvergierende Störungsreihe bzgl. des äußeren Feldes entwickelt werden, obwohl Multiphoton-Prozesse sehr hoher Ordnung in den Wellenfunktionen enthalten sind. Die Erklärung dieses überraschenden Ergebnisses könnte für das Verständnis der Wechselwirkung mit weichen Photonen im allgemeinen von grundlegender Bedeutung sein. Aus dieser störungstheoretischen Entwicklung folgt, daß die Verstärkung der totalen Zerfallsrate in der Größenordnung $(mc^2/Q)^3 (E_0/E_c)^2$ liegt. Für realistische Kerne in Laser- oder gar in Radiofeldern ist dies eine sehr kleine Zahl, so daß derzeit Experimente zur Beschleunigung von Kernzerfällen mit intensiven langwelligen Feldern aussichtslos erscheinen.

Bei verbotenen Betazerfall treten zwei verschiedene Feldbeiträge zur totalen Zerfallsrate auf: zum einen gibt es bei einem in ℓ -ter Ordnung verbotenen Zerfall genauso wie beim erlaubten Zerfall Quantenkorrekturen in der Größenordnung $(E_0/E_c)^2$ zu dieser ℓ -ten Ordnung. Zusätzlich treten jedoch auch Beiträge zur $(\ell-1)$ ten, $(\ell-2)$ ten, ... Ordnung sowie zum erlaubten Zerfall auf, wodurch die Auswahlregeln modifiziert werden. Diese Beiträge sind jedoch von derselben Größenordnung $(E_0/E_c)^2$ wie die Feldkorrekturen zur ℓ -ten Ordnung.

Unsere explizite Berechnung der Einflüsse einer ebenen Welle auf die nukleare Zerfallsrate bestätigt die Rechnungen von Nikishov und Ritus [24,25] zum Zerfall von freien Teilchen in konstanten gekreuzten Feldern sowie die numerischen Ergebnisse von Narozhnyi et al. [31] und Lyul'ka [32]. Andererseits sind die Behandlung des Neutronzerfalls durch Baranov [23] sowie die beiden Vorschläge zur Beschleunigung des nuklearen Betazerfalls von Becker et al. [18] und Reiss [19] inkorrekt. Die beiden vorhergesagten Feldeffekte existieren zwar im Prinzip, jedoch bei ganz anderen Parametern, als ursprünglich behauptet. Alle drei Arbeiten kommen zu dem Schluß, daß Feldeinflüsse auf die totale Zerfallsrate durch den klassischen Wechselwirkungsparameter v bestimmt werden, während das korrekte Kriterium besagt, daß die Lebensdauer über E_0/E_c vom äußeren Feld abhängt. In keiner dieser Arbeiten wurde untersucht, in wie weit man mit der Volkov-Wellenfunktion nur klassische Effekte

reproduziert, und wie man diese Effekte von den gesuchten QED-Effekten trennen kann. Unser Ergebnis wurde in jüngster Zeit von mehreren russischen Gruppen unabhängig bestätigt. Während diese Gruppen jedoch nur den erlaubten Betazerfall betrachten und nur die führenden Terme der Störungsreihe ableiten, behandeln wir den Betazerfall in beliebiger Ordnung von Verbotenheit und erhalten das exakte Ergebnis für die totale Zerfallsrate.

Weiterhin liefern unsere Rechnungen, daß sich die relative Änderung der totalen Zerfallsrate vom Vakuumzerfall zum Zerfall im äußeren Feld in der nichtrelativistischen Theorie beschreiben läßt. Relativistische Quantenkorrekturen zur totalen Zerfallsrate sind klein. Dieses Ergebnis gilt für alle realistischen Kerne.

Der wesentliche Unterschied zwischen den Coulomb-Korrekturen, durch die eine Änderung der totalen Zerfallsrate bewirkt wird, und den Einflüssen eines intensiven Laserfeldes, durch das die Lebensdauer nicht geändert wird, liegt darin, daß das Coulombfeld am Kernrand größer als die kritische Feldstärke für Elektronen ist, während das Laserfeld noch im klassischen Bereich (4.40) - (4.42) liegt.

In der theoretischen Beschreibung ist der Betazerfall im äußeren Feld eng verwandt mit der Multiphoton-Ionisation von Atomen. In beiden Prozessen wird ein Elektron emittiert, dessen Wechselwirkung mit dem äußeren Feld exakt berücksichtigt werden kann, während das gebundene System in Anfangs- und Endzustand in erster Näherung als ungestört betrachtet werden kann (Keldysh-Näherung). Der physikalische Unterschied zwischen beiden Prozessen liegt darin, daß der Betazerfall auch ohne äußeres Feld stattfindet und der Q -Wert für alle realistischen Kerne so groß ist, daß die Wechselwirkung mit dem Feld klassisch beschrieben werden kann. Die Multiphoton-Ionisation ist dagegen (für geringe Intensitäten) ein Quanteneffekt, der ohne äußeres Feld nicht stattfindet und schon durch Felder induziert werden kann, die schwach sind gegenüber der kritischen Feldstärke.

In beiden Prozessen haben die gebundenen Zustände im Anfangs- und Endzustand verschiedene Ladungen und die Frage, wie ungestörte gebundene Zustände zu beschreiben sind, ist von entscheidender Bedeutung. Die Eichinvarianz verlangt, daß auch geladene Teilchen, deren Zustand durch das äußere Feld nicht beeinflusst wird, durch Wellenfunktionen beschrieben werden, die die Anwesenheit des Feldes mit berücksichtigen. Es wurde klargestellt, daß ungestörte

Zustände in einer beliebigen Eichung nicht durch Lösungen der Schrödinger-Gleichung, in der alle feldabhängigen Terme gleich Null gesetzt werden, bestimmt sind, sondern durch Eigenzustände des Energieoperators, dessen meßbare Eigenwerte feldunabhängig sind.

In Kapitel VI wurde gezeigt, daß bei Feldstärken, die mit der kritischen Feldstärke vergleichbar sind, nicht nur die Wechselwirkung mit den emittierten geladenen Teilchen eine Rolle spielt, sondern auch die direkte Wechselwirkung mit dem Kern. Durch beide Wechselwirkungen können sowohl der Phasenraum des Zerfalls vergrößert als auch die Auswahlregeln für den Zerfall modifiziert werden. In einem entsprechend langwelligen Feld werden also Änderungen der totalen Zerfallsrate sowohl durch die Wechselwirkung im Anfangszustand als auch durch die Wechselwirkung im Endzustand hervorgerufen.

In Kapitel VI wurde weiterhin gezeigt, daß Zwei-Stufen-Zerfälle, bei denen simultan zu dem Kernzerfall ein Photon absorbiert wird, durch die Breit-Wigner-Formel beschrieben werden können. Bei nichtresonanter Anregung hängen die in dem Breit-Wigner-Wirkungsquerschnitt auftretenden Zerfallsraten und Breiten jedoch von der Photonenenergie ab, da für den Zerfall des virtuellen Zwischenniveaus ein anderer Phasenraum zur Verfügung steht als für das reelle Kernniveau. Dieses Ergebnis ist nicht auf die Photonenstreuung an Kernen beschränkt, sondern gilt allgemein für beliebige Projektile und Targets. In diesem Zusammenhang wurde gezeigt, daß auch der dritte Vorschlag zur Beschleunigung von Kernzerfällen, die Arbeit von Arad et al. [22] zur Ein-Photon-Absorption aus einem Laserfeld, auf einer falschen theoretischen Behandlung beruht und daß die erzielbare Änderung der Zerfallszeit unbeobachtbar klein ist.

Um eine merkliche Verstärkung nuklearer Zerfallsraten zu erzielen, müssen die Feldparameter außerhalb des klassischen Bereichs liegen. Man benötigt dazu ein langwelliges Feld, dessen Stärke mit der kritischen Feldstärke vergleichbar ist, oder ein kurzwelliges Feld, dessen Photonenenergie vergleichbar ist mit dem Q-Wert des Zerfalls oder einer nuklearen Anregungsenergie. In einem intensiven Röntgenfeld wird die Verstärkung der Zerfallsrate vor allem durch die Wechselwirkung zwischen Feld und Kern hervorgerufen. Dabei ist meist nur die Wechselwirkung im Anfangszustand von Bedeutung. Die maximale Verstärkung des Zerfalls erhält man, wenn ein angeregtes Niveau existiert, das wesentlich schneller in den Endzustand zerfällt als der Ausgangszustand, und wenn man mit einem intensiven äußeren Feld dieses Zwei-Niveau-System,

bestehend aus Ausgangs- und angeregtem Zustand, sättigen kann. Dann sind beide Zustände gleichbesetzt und der Kern zerfällt mit der halben Rate des angeregten Zustandes. Diese Sättigung kann erzeugt werden mit einer exakt resonanten Anregung des Kerns. Ein zentrales Problem bei der resonanten Anregung von Kernen besteht darin, daß die Breite des Kernniveaus sehr schmal ist im Vergleich zu typischen Niveauabständen. Zur Sättigung des Zweiniveau-Systems werden daher extrem schmalbandige oder extrem intensive Röntgen- und Gammaquellen benötigt. Auch zur Bestimmung der Neutrinomasse aus dem photoinduzierten Elektroneneinfang werden durchstimmbare, intensive und kontinuierliche Röntgenquellen benötigt. Damit sind Experimente zu diesen Zerfallsmechanismen derzeit noch nicht realisierbar.

Anhang

Besselfunktionen großer Argumente

In diesem Anhang sollen die Besselfunktionen $J_n(z)$ mit festem großen Argument $z \gg 1$ als Funktion der Ordnung n diskutiert werden. Dies geschieht am besten durch Verwendung einer geeigneten Näherung für die Besselfunktionen. Für unsere Zwecke ist die asymptotische Entwicklung von Langer ausreichend [142]:

$$J_n(z) \approx \left(\frac{4f_n(z)}{u^2 - z^2} \right)^{1/4} \text{Ai}(f_n(z)) \quad , \quad u \gg 1 \quad . \quad (\text{A1})$$

Die Funktion $f_n(z)$ ist gegeben durch

$$f_n(z) = \begin{cases} -\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \left(\sqrt{z^2 - u^2} - u \arccos \frac{u}{z} \right)^{2/3} & u < z \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \left(u \ln \frac{u + \sqrt{u^2 - z^2}}{z} - \sqrt{u^2 - z^2} \right)^{2/3} & u > z. \end{cases} \quad (\text{A2})$$

Die Airy-Funktion $\text{Ai}(x)$ oszilliert sehr schnell für große negative Argumente entsprechend der asymptotischen Entwicklung [83]

$$\text{Ai}(-x) \approx \frac{\cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\pi^{1/2} x^{1/4}} \quad , \quad x \gg 1 \quad , \quad (\text{A3})$$

erreicht ihr Maximum für $x = -1$ und geht dann für positive Argumente schnell gegen Null gemäß

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\pi^{1/2} x^{1/4}} \quad , \quad x \gg 1 \quad . \quad (\text{A4})$$

Daraus folgt, daß die Besselfunktion $J_n(z)$ ($z \gg 1$) als Funktion der Ordnung n ihr Maximum für $n_m \approx z - (2z/9)^{1/3} \approx z$ erreicht. Diese Abschätzung folgt aus der Entwicklung $\arccos(1-\epsilon) \approx \sqrt{2\epsilon}$. Mit wachsendem z rückt das Maximum, relativ zu z , immer näher an z heran, d. h. $(z - n_m)/z \rightarrow 0$ für $z \rightarrow \infty$. Außerdem wird mit wachsendem z das Maximum der Besselfunktion relativ zu $J_0(z)$ (allgemeiner $J_n(z)$, $n \ll z$) immer höher. Für $n > n_m$ fällt $J_n(z)$ exponentiell ab. Für $n > z$ können wir die asymptotische Entwicklung der Airyfunktion einsetzen und finden

$$J_n(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp\left\{-\left[u \ln \frac{u + \sqrt{u^2 - z^2}}{z} - \sqrt{u^2 - z^2}\right]\right\}}{(u^2 - z^2)^{1/4}} \quad , \quad u > z. \quad (\text{A5})$$

Bei Entwicklung des Logarithmus sieht man, wie extrem steil die Besselfunktion als Funktion der Ordnung jenseits des Maximums abfällt. Mit wachsendem z wird dieser Abfall für $n > z$ immer steiler. Für $n < n_m$ können wir ebenfalls die asymptotische Entwicklung der Airy-Funktion verwenden. Dies liefert

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(\sqrt{z^2 - n^2} - n \arccos \frac{n}{z} - \frac{\pi}{4})}{(z^2 - n^2)^{1/4}}, \quad n < z. \quad (A6)$$

Gl. (A6) wird häufig als Debye's asymptotische Entwicklung für $n < z$ bezeichnet. Auch für $n \rightarrow 0$ zeigt diese Entwicklung noch das richtige asymptotische Verhalten. Die Amplitude von $J_n(z)$ beginnt für $n = 0$ bei $\sqrt{2/\pi z}$ und wächst für $|n| \rightarrow n_m$ immer schneller an. Sie ist symmetrisch um $n = 0$.

Gl. (A6) beschreibt den "klassischen" Grenzfall der Besselfunktionen. Die Bezeichnung "klassisch" soll darauf hinweisen, daß wir Gl. (A6) mit Hilfe der stationären Phasenmethode aus der Integraldarstellung der Besselfunktionen erhalten können. Die stationäre Phasenmethode schätzt das Integral über eine schnell oszillierende Funktion durch den Beitrag aus der Umgebung der Punkte ab, an denen der Integrand stationär ist (siehe z. B. Ref. 143)

$$\int_a^b dt g(t) e^{i\eta f(t)} \approx \sum_{t_n \in [a,b]} \sqrt{\frac{2\pi i}{\eta f''(t_n)}} g(t_n) e^{i\eta f(t_n)}. \quad (A7)$$

Hierbei ist η eine große, positive Zahl und $f(t)$ und $g(t)$ sind reelle Funktionen der reellen Variablen t . Die Funktion $g(t)$ soll im Integrationsgebiet nur langsam mit der Zeit variieren. Die stationären Punkte t_n der Funktion $f(t)$ ergeben sich aus der Bedingung $f'(t_n) = 0$.

Besselfunktionen $J_n(z)$ mit ganzzahliger Ordnung n haben die Integraldarstellung

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i(z \sin \vartheta - n\vartheta)}. \quad (A8)$$

Der Integrand hat zwei stationäre Punkte $\vartheta = \pm \arccos(n/z)$ in dem Integrationsintervall $[-\pi, \pi]$. Für die Existenz stationärer Phasen ist also Voraussetzung, daß $|n| \leq |z|$ ist. Dies wird durch eine Θ -Funktion berücksichtigt. Die Anwendung von Formel (A7) auf Gl. (A8) liefert

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\sqrt{z^2 - n^2} - n \arccos \frac{n}{z} - \frac{\pi}{4}\right) (z^2 - n^2)_+^{-1/4}. \quad (A9)$$

Hierbei wurde die Abkürzung $x_+^\alpha \equiv \Theta(x)x^\alpha$ eingeführt, wobei Θ die übliche Stufenfunktion ($\Theta(x) = 1$ für $x \geq 0$, $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$) bezeichnet. Gl. (A9) stimmt für $n < z$ mit der Debye-Näherung (A6) überein.

In Analogie zu der Ableitung von Gl. (A9) kann auch die "klassische" Form verallgemeinerter Besselfunktionen gewonnen werden. Verallgemeinerte Besselfunktionen mit ganzzahliger Ordnung n können definiert werden durch das Integral [94]

$$J_n(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i(a \sin \vartheta + \frac{b}{4} \sin 2\vartheta - n\vartheta)} \quad (A10)$$

Ihre Beziehung zu den gewöhnlichen Besselfunktionen (A8) ist gegeben durch

$$J_n(a, b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-2k}(a) J_k\left(\frac{b}{4}\right), \quad (A11)$$

wie sich aus Gl. (2.71) leicht nachprüfen läßt. Der Integrand in Gl. (A10) hat vier stationäre Punkte in $[-\pi, \pi]$

$$\vartheta = \pm \arccos\left(\frac{-a \pm \sqrt{c^2}}{2b}\right)$$

mit

$$c^2 \equiv a^2 + 2b^2 + 4bn.$$

Notwendig für die Existenz stationärer Phasenpunkte ist $c^2 \geq 0$ und $|\cos \vartheta_{\pm}| \leq 1$. Aus der Bedingung $c^2 \geq 0$ erhält man je nach Vorzeichen von b eine Unter- oder Obergrenze für n . Die stationäre Phasenmethode (A7) liefert dann für die verallgemeinerten Besselfunktionen

$$J_n(a, b) = \sqrt{\frac{2|b|}{\pi}} 2^{1/4} (c^2)_+^{-1/4} * \quad (A12)$$

$$\left\{ \cos\left[\sqrt{2} \frac{3a+c}{8|b|} \sqrt{b^2 - a^2 - 2bn + ac} - n \arccos \frac{-a+c}{2b} - \frac{\pi}{4}\right] (b^2 - a^2 - 2bn + ac)_+^{-1/4} \right.$$

$$\left. + \cos\left[\sqrt{2} \frac{3a-c}{8|b|} \sqrt{b^2 - a^2 - 2bn - ac} - n \arccos \frac{-a-c}{2b} + \frac{\pi}{4}\right] (b^2 - a^2 - 2bn - ac)_+^{-1/4} \right\}.$$

Singuläre Punkte können hierbei auftreten für $n = -a^2/4b - b/2$ und $n = b/2 \pm a$.

Literatur

- /1/ W. Bothe, Handbuch der Physik, Hrsg. H. Geiger und K. Scheel,
(Springer, Berlin, 1933, 2. Aufl.) Bd. 22-1, S. 201
- /2/ E. Segrè, Phys. Rev. 71 (1947) 274
- /3/ R. Daudel, Rev. Sci. 85 (1947) 162
- /4/ E. Segrè und C.E. Wiegand, Phys. Rev. 75 (1949) 39 und 81 (1949) 284;
R.F. Leininger, E. Segrè und C.E. Wiegand,
Phys. Rev. 76 (1949) 897 und 81 (1949) 280
- /5/ K.T. Bainbridge, M. Goldhaber und E. Wilson,
Phys. Rev. 84 (1951) 1260 und 90 (1953) 430
- /6/ J.A. Cooper, J.M. Hollander und J.O. Rasmussen,
Phys.Rev.Lett. 15 (1965) 680
- /7/ G.T. Emery, Ann.Rev.Nucl.Sci. 22 (1972) 165
- /8/ J.N. Bahcall, Phys.Rev. 124 (1961) 495
- /9/ K. Alder, G. Baur und U. Raff, Phys.Lett. 34A (1971) 163
und Helv.Phys.Acta 44 (1971) 514
- /10/ A.G.W. Cameron, Astrophys.J. 130 (1959) 452
- /11/ P.B. Shaw, D.D.Clayton und F.C. Michel, Phys.Rev. 140 (1965) B1433
- /12/ G.F. Zharkov, Yad.Fiz. 1 (1965) 173 [Sov.J.Nucl.Phys. 1 (1965) 120]
- /13/ R.F. O'Connell und J.J. Matese, Nature 222 (1969) 649 und
Phys.Lett. 29A (1969) 533;
J.J. Matese und R.F. O'Connell, Phys.Rev. 180 (1969) 1289
- /14/ L. Fassio-Canuto, Phys.Rev. 187 (1969) 2141
- /15/ L.D. Landau und E.M. Lifschitz, Course of Theoretical Physics, Bd. 2,
The Classical Theory of Fields (Pergamon, Oxford, 1962, 2. Aufl.), § 75
- /16/ J.H. Eberly, Progress in Optics, Hrsg. E. Wolf (North-Holland,
Amsterdam, 1969) Bd. 7, S. 361
- /17/ C.S. Wu und S.A. Moszkowski, Beta Decay (Wiley, New York, 1966)

- /18/ W. Becker, W.H. Louisell, J.D. McCullen und M.O. Scully,
Phys.Rev.Lett. 47 (1981) 1262
- /19/ H.R. Reiss, Phys.Rev. C27 (1983) 1199
- /20/ H.R. Reiss, Phys.Rev. C27 (1983) 1229
- /21/ H.R. Reiss, private Mitteilung, 1983
- /22/ B. Arad, S. Eliezer und Y. Paiss, Phys.Lett. 74A (1979) 395
- /23/ I.G. Baranov, Izv.Vyssh.Uchebn.Zaved.Fiz. 17, No. 4 (1974) 115
[Sov. Phys. J. 17 (1974) 533]
- /24/ A.I. Nikishov und V.I. Ritus, Zh. Eksp.Teor.Fiz. 46 (1964) 1768
[Sov. Phys. JETP 19 (1964) 1191]
- /25/ V.I. Ritus, Zh.Eksp.Teor.Fiz. 56 (1969) 986 [Sov.Phys.JETP 29 (1969) 532]
- /26/ R. Loudon, The Quantum Theory of Light, (Clarendon, Oxford, 1973)
Kap. 8 und 11;
M. Sargent III, M.O. Scully und W.E. Lamb,Jr.,
Laser Physics (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974)
- /27/ H.R. Reiss, J.Math.Phys. 3 (1962) 59
- /28/ L.S. Brown und T.W.B. Kibble, Phys.Rev. 133 (1964) A705
- /29/ I.I. Gol'dman, Zh.Eksp.Teor.Fiz. 46 (1964) 1412
[Sov.Phys.JETP 19 (1964) 954] und Phys.Lett. 8 (1964) 103
- /30/ A.I. Nikishov und V.I. Ritus, Zh.Eksp.Teor.Fiz. 46 (1964) 776
[Sov.Phys. JETP 19 (1964) 529]
- /31/ N.B. Narozhnyi, A.I. Nikishov und V.I. Ritus, Zh.Eksp.Teor.Fiz.
47 (1964) 930 [Sov.Phys.JETP 20 (1965) 622]
- /32/ V.A. Lyul'ka, Zh.Eksp.Teor.Fiz. 69 (1975) 800
[Sov.Phys. JETP 42 (1975) 408]
- /33/ I.M. Ternov, V.N. Rodionov, V.G. Zhulego und A.I. Studenikin,
Yad.Fiz. 28 (1978) 1454 [Sov.J.Nucl.Phys. 28 (1978) 747] und
Ann. der Phys. 37 (1980) 406
- /34/ D.E. Murnick und M.S. Feld, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. 29 (1979) 411

- /35/ P. Jacquinoth und R. Klapisch, Rep.Prog.Phys. 42 (1979) 773;
P.G. Hansen, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. 29 (1979) 69;
O. Redi, Physics Today 34, No. 2 (1981) 26;
H.A. Schuessler, Physics Today 34, No. 2 (1981) 48
- /36/ G.C. Baldwin und S.A. Wender, Phys.Rev.Lett. 48 (1982) 1461
- /37/ Y. Izawa und C. Yamanaka, Phys.Lett. 88B (1979) 59
- /38/ M. Morita, Prog.Theor.Phys. 49 (1973) 1574;
K. Otozai, R. Arakawa und M. Morita, Prog.Theor.Phys. 50 (1973) 1771;
K. Okamoto, Laser Interaction and Related Plasma Phenomena,
Hrsg. H.J. Schwarz und H. Hora (Plenum, New York, 1977) Bd. 4A, S. 283
- /39/ V.I. Gol'danskii und V.A. Namiot,
Pis'ma Zh.Eksp.Teor.Fiz. 23 (1976) 495 [JETP Lett. 23 (1976) 451];
Phys. Lett. 62B (1976) 393;
Yad.Fiz. 33 (1981) 319 [Sov.J.Nucl.Phys. 33 (1981) 169]
- /40/ V.S. Letokhov, Kvantovaya Electron. (Moscow) 4 (1973) 125
[Sov.J.Quantum Electron. 3 (1974) 360]
- /41/ G.C. Baldwin, J.C. Solem und V.I. Gol'danskii,
Rev.Mod.Phys. 53 (1981) 687
- /42/ C.B. Collins, S. Olariu, M. Petrascu und I. Popescu,
Phys. Rev. Lett. 42 (1979) 1397;
Phys. Rev. C20 (1979) 1942
- /43/ S. Olariu, I. Popescu und C.B. Collins, Phys.Rev. C23 (1981) 50
- /44/ L. Pfeiffer, J.App.Phys. 42 (1971) 1725
- /45/ S. Olariu, I. Popescu und C.B. Collins, Phys.Rev. C23 (1981) 1007
- /46/ E.V. Baklanov und V.P. Chebotaev, Pis'ma Zh.Eksp.Teor.Fiz. 21 (1975) 286
[JETP Lett. 21 (1975) 131];
L.A. Rivlin, Kvantovaya Electron. (Moscow) 4 (1977) 676
[Sov.J.Quantum Electron. 7 (1977) 380];
V.I. Vysotskii, Zh.Eksp.Teor.Fiz. 77 (1979) 492
[Sov.Phys. JETP 50 (1979) 250]

- /47/ C.B. Collins, F.W. Lee, D.M. Shemwell, B.D. De Paola, S. Olariu und I. Popescu, J.Appl.Phys. 53 (1982) 4645
- /48/ D.F. Zaretskii und V.V. Lomonosov,
Pis'ma Zh.Eksp.Teor.Fiz. 30 (1979) 541 [JETP Lett. 30 (1979) 508];
Zh.Eksp.Teor.Fiz. 81 (1981) 429 [Sov.Phys. JETP 54 (1981) 229];
Zh.Eksp. Teor.Fiz.84 (1983) 1951 [Sov.Phys.JETP 57 (1983) 1136]
- /49/ R.M.O. Galvao, N.S. Almeida und L.C.M. Miranda,
Lett.Nuovo Cim. 38 (1983) 375
- /50/ R.R. Schlicher, W.Becker, J.Bergou und M.O. Scully,
Proc. of the NATO ASI on Quantum Electrodynamics and Quantum Optics,
Boulder, Colorado, 1983; Hrsg. A.O. Barut (Plenum, New York, 1984), S. 405
- /51/ M. Göppert-Mayer, Ann. der Phys. 9 (1931) 273
- /52/ J.M. Worlock, Laser Handbook, Hrsg. F.T. Arecchi und E.O. Schulz-Du Bois,
(North-Holland, Amsterdam, 1972) Bd. 2, S. 1323,
und Referenzen in dieser Arbeit
- /53/ W.E. Lamb,Jr. und R.C. Retherford, Phys.Rev. 79 (1950) 549;
W.E. Lamb,Jr., Phys.Rev. 85 (1952) 259
- /54/ C. Cohen-Tannoudji, B. Diu und F. Laloe, Quantum Mechanics,
(Hermann/Wiley, Paris, 1977)
- /55/ K.-H. Yang, Ann. Phys. (N.Y.) 101 (1976) 62
- /56/ J.J. Forney, A. Quattropani und F. Bassani, Nuovo Cimento 37B (1977) 78
- /57/ W.L. Peticolas, R. Norris und K.E. Rieckhoff, J.Chem.Phys.42 (1968) 4164
- /58/ F. Bassani, J.J. Forney und A. Quattropani, Phys.Rev.Lett.39 (1977) 1070;
A. Quattropani, F. Bassani und S. Carillo, Phys.Rev. A25 (1982) 3079
- /59/ S. Olariu, I. Popescu und C.B. Collins, Phys.Rev. D20 (1979) 3095
- /60/ H.R. Reiss, Phys.Rev. A19 (1979) 1140
- /61/ H.R. Reiss, Phys.Rev. A1 (1970) 803
- /62/ C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, C. Fabre und G. Grynberg,
Phys. Rev. A8 (1973) 2747

- /63/ R.M. Herman, Proc. of the 8th ICPEAC, Beograd, 1973,
Hrsg. B.C. Cobić und M.V. Kurepa (Institute of Physics, Beograd, 1973)
Abstracts of Papers, S. 588;
A. Decoster, Phys. Rev. A9 (1974) 1446;
S.P. Tewari und S.P. Tewari, Phys. Lett. 50A (1974) 369;
D.F. Zaretskii und V.P. Krainov, Zh.Eksp.Teor.Fiz. 66 (1974) 537
[Sov. Phys. JETP 39 (1974) 257];
A. Rachman und G. Laplanche, J.Phys. B8 (1975) 826
- /64/ H.R. Reiss, Phys.Rev. A23 (1981) 3019
- /65/ W. Becker, R.R. Schlicher und M.O. Scully, Phys.Rev. C29 (1984) 1124
- /66/ H.R. Reiss, Phys.Rev. C29 (1984) 1132
- /67/ W.C. Henneberger, Phys.Rev.Lett. 21 (1968) 838
- /68/ W.C. Henneberger, Phys.Rev. A16 (1977) 1379
- /69/ H.S. Brandi, B. Koiller, H.G.P. Lins de Barros, L.C.M. Miranda und
J.J. Castro, Phys.Rev. A17 (1978) 1900;
H.S. Brandi, B. Koiller und H.G.P. Lins de Barros,
Phys.Rev. A19 (1979) 1058;
H.G.P. Lins de Barros und H.S. Brandi, Can.J.Phys. 57 (1979) 1886
- /70/ C.A.S. Lima und L.C.M. Miranda, Phys.Rev. A23 (1981) 3335;
L.C.M. Miranda, Phys.Lett. 86A (1981) 363;
C.A.S.Lima und L.C. M. Miranda, Phys.Lett. 86A (1981) 367
- /71/ H.S. Brandi, B. Koiller, L.C.M. Miranda und J.J. Castro,
Phys. Rev. A25 (1982) 3429
- /72/ F. Ehlotzky, Opt.Comm. 40 (1981) 135
- /73/ S. Geltman und M.R. Teague, J.Phys. B7 (1974) L22
- /74/ M.H. Mittleman, Phys.Lett. 47A (1974) 55;
J.I. Gersten und M.H. Mittleman, Phys.Rev. A10 (1974) 74
und A11 (1975) 1103
- /75/ S. Geltman, J.Phys. B10 (1977) 831

- /76/ L.V. Keldysh, Zh.Eksp.Teor.Fiz. 47 (1964) 1945
[Sov.Phys.JETP 20 (1965) 1307]
- /77/ J.D. Cole, Perturbation Methods in Applied Mathematics
(Blaisdell, Waltham, Mass. 1968);
R.C. Davidson, Methods in Nonlinear Plasma Theory
(Academic Press, New York, 1972);
C.M. Bender und S.A. Orszag, Advanced Mathematical Methods for
Scientists and Engineers (McGraw-Hill, New York, 1978)
- /78/ W. Gordon, Z.Phys. 40 (1926) 117
- /79/ D.M. Volkov, Z.Phys. 94 (1935) 250
- /80/ J.H. Eberly und P. Lambropoulos (Hrg.), Multiphoton Processes
(Wiley, New York, 1978)
- /81/ J.D. Bjorken und S.D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics,
(McGraw-Hill, New York, 1964)
- /82/ L.D. Landau und E.M. Lifschitz, Course of Theoretical Physics, Bd. 4, Teil 1
Relativistic Quantum Theory, (Pergamon, Oxford, 1971, 1. Aufl.) § 40,59,98
- /83/ M. Abramowitz und I.A. Stegun (Hrsg.), Handbook of Mathematical Functions
(National Bureau of Standards, AMS 55, Washington, 1972, 10. Aufl.)
- /84/ H.R. Reiss, Phys.Rev. A22 (1980) 1786
- /85/ R.R. Schlicher, W. Becker und M.O. Scully, Proc. of the NATO ASI on
Non-Equilibrium Cooperative Phenomena in Physics and Related Fields,
El Escorial, Spain, 1983; Hrsg. M.G. Velarde (Plenum, New York, 1984)
S. 145
- /86/ A. De Shalit und H. Feshbach, Theoretical Nuclear Physics (Wiley,
New York, 1974), Kap. XIII und IX.
- /87/ E.R. Hansen, A Table of Series and Products (Prentice-Hall, Englewood
Cliffs, N.J., 1975)
- /88/ H.R. Reiss, Phys.Rev. Lett. 48 (1982) 652 und Appl.Phys. B28 (1982) 310
- /89/ W. Becker, W.H. Louisell, J.D. McCullen und M.O. Scully,
Phys.Rev.Lett. 48 (1982) 653

- /90/ J.S. Hebron, PhD Thesis, University of British Columbia, Vancouver, B.C., 1982 (unveröffentlicht)
- /91/ N.M. Kroll und K.M. Watson, Phys.Rev. A8 (1973) 804
- /92/ W. Becker, Optics Comm. 33 (1980) 69
- /93/ L.I. Schiff, Quantum Mechanics (McGraw-Hill, New York, 1955, 2. Aufl.) § 13; siehe insbes. Abb. 11
- /94/ C. Leubner, Phys.Rev. A23 (1981) 2877, und Referenzen in dieser Arbeit
- /95/ H.S. Brandi, L. Davidovich und N. Zagury, Phys.Rev. A24 (1981) 2044
- /96/ C.M. Lederer und V.S. Shirley (Hrsg.), Table of Isotopes, (Wiley, New York, 1978, 7. Aufl.)
- /97/ I.M. Ternov, V.N. Rodionov, A.E. Lobanov und O.F. Dorofeev, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 37 (1983) 288 [JETP Lett. 37 (1983) 342]
- /98/ A.A. Sokolov und I.M. Ternov, Synchrotron Radiation (Akademie, Berlin, 1968)
- /99/ R.L. Garwin und L.M. Lederman, Nuovo Cimento 11 (1959) 776;
L.I. Schiff, Phys. Rev. 132 (1963) 2194;
J.I. Gersten und M.H. Mittleman, Phys.Rev. Lett. 48 (1982) 651
- /100/ A.W. Overhauser, 1982, private Mitteilung
- /101/ Dieses Ergebnis wurde erstmals vorgetragen auf der 12th Int.Quantum Electronics Conference, München, Juni 1982

W. Becker, W.H. Louisell, J.D. McCullen, R.R. Schlicher und M.O. Scully, Appl.Phys. B28 (1982) 310
- /102/ I.M. Ternov, V.N. Rodionov und O.F. Dorofeev, Zh.Eksp.Teor.Fiz. 84 (1983) 1225 [Sov.Phys. JETP 57 (1983) 710]
- /103/ A.I. Nikishov und V.I. Ritus, Zh.Eksp.Teor.Fiz. 85 (1983) 24 [Sov.Phys. JETP 58 (1983) 14]
- /104/ J. Schwinger, W.Y. Tsai und T. Erber, Ann.Phys. (N.Y.) 96 (1976) 303
- /105/ E. Fermi, Nuovo Cim. 11 (1934) 1 und Z. Phys. 88 (1934) 161;

E. Fermi, Nuclear Physics, (University of Chicago Press, Chicago, 1949)
- /106/ W. Becker, R.R. Schlicher und M.O. Scully, Nucl. Phys. A426 (1984) 125

- /107/ I.S. Gradshteyn und I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products (Academic Press, New York, 1980)
- /108/ H. Mitter, Acta Phys. Austriaca, Suppl. XIV (1975) 397
- /109/ H.R. Reiss, Phys. Rev. C28 (1983) 1402
- /110/ H.R. Reiss, Phys.Rev.Lett. 52 (1984) 1061
- /111/ H.R. Reiss, Phys.Rev.Lett. 52 (1984) 2095
- /112/ H.R. Reiss, Phys.Rev. C29 (1984) 1825
- /113/ H.R. Reiss, Phys.Rev. C29 (1984) 2290
- /114/ H.R. Reiss, Phys.Lett. 103A (1984) 312
- /115/ D.H. Kobe, Phys.Rev.Lett. 40 (1978) 538
- /116/ G. Grynberg und E. Giacobino, J.Phys. B12 (1979) L 93;
K. Haller und R.B. Sohn, Phys.Rev. A20 (1979) 1541;
Y. Aharonov und C.K. Au, Phys.Rev. A20 (1979) 1553
- /117/ Z. Fried, Phys.Rev. A8 (1973) 2835
- /118/ W. Becker, R.R. Schlicher und M.O. Scully, Phys.Rev.Lett. 52 (1984) 2094
- /119/ W. Becker, G.T. Moore, R.R. Schlicher und M.O. Scully,
Phys.Lett. 94A (1983) 131
- /120/ W. Becker, R.R. Schlicher und M.O. Scully, Phys.Lett. 101A (1984) 58
- /121/ R.A. Neville und F. Rohrlich, Phys. Rev. D3 (1971) 1692
- /122/ T.W.B. Kibble, Phys.Rev. 175 (1968) 1624
- /123/ J.E. Bayfield, Prog.Quantum Electron. 6 (1980) 219;
A. L'Huillier, L.A. Lompre, G. Mainfray und C. Manus,
Phys.Rev. Lett. 48 (1982) 1814;
S.L. Chin, G. Farkas und F. Yergeau, J.Phys. B 16 (1983) L 223
- /124/ J.M. Blatt und V.F. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics,
(Wiley, New York, 1952)
- /125/ V. Weisskopf, Phys. Rev. 83 (1951) 1073
- /126/ E.A. Power und S. Zienau, Nuovo Cimento 6 (1957) 7 und
Phil.Trans.R.Soc. 251 (1959) 427

- /127/ W. Becker, R.R. Schlicher und M.O. Scully, Phys. Lett. 106A (1984) 441
- /128/ W.S. Cooper III und H. Ringler, Phys.Rev. 179 (1969) 226
- /129/ E.J. Konopinski, The Theory of Beta Radioactivity (Oxford U.P., London, 1966)
- /130/ W. Bambynek et al., Rev.Mod.Phys. 49 (1977) 77
- /131/ E. Bergkvist, Nucl.Phys. B39 (1972) 317;
V.A. Lubimov, E.G. Novikov, V.Z. Nozik, E.F. Tretyakov und
V.S. Kosik, Phys.Lett. 94B (1980) 266;
J.J. Simpson, Phys.Rev. D23 (1981) 649
- /132/ K. Siegbahn (Hrsg.), Alpha-, Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy,
(North-Holland, Amsterdam, 1965), Bd. II, S. 1569
- /133/ A. De Rújula, Nucl. Phys. B188 (1981) 414
- /134/ R.J. Glauber und P.C. Martin, Phys.Rev. 104 (1956) 158;
P.C. Martin und R.J. Glauber, Phys.Rev. 109 (1958) 1307
- /135/ R.J. Glauber, 1982, private Mitteilung
- /136/ J.U. Andersen et al., Phys.Lett. 113B (1982) 72
- /137/ J.H. Scofield, Atom.Nucl.Data Tables 14 (1974) 121
- /138/ O. Keski-Rahkonen und M.O. Krause, Atom.Nucl.Data Tables 14 (1974) 139
- /139/ W.D. McGlinn, Phys.Rev. A28 (1983) 2538
- /140/ T. Kirsten, H. Richter und E. Jessberger, Phys.Rev.Lett. 50 (1983) 474
- /141/ W. Becker, R.R. Schlicher, M.O. Scully, M.S. Zubairy und M. Goldhaber,
Phys.Lett. 131B (1983) 16
- /142/ E. Jahnke, F. Emde und F. Lösch, Tables of Higher Functions,
(Teubner, Stuttgart, 1960, 6. Aufl.);
W. Magnus, F. Oberhettinger und R.P. Soni, Formulas and Theorems for
the Special Functions of Mathematical Physics (Springer, Berlin,
1966, 3. Aufl.)
- /143/ A. Erdélyi, Asymptotic Expansions (Dover, New York, 1956)

Das Thema dieser Arbeit wurde von Herrn Prof. M. O. Scully vorgeschlagen. Ich möchte ihm danken für viele Ratschläge und Anregungen zum Fortgang dieser Arbeit, für seine Einladung an das Institute for Modern Optics an der University of New Mexico, Albuquerque (USA), wo ein Großteil dieser Arbeit entstand, sowie für die große Gastfreundschaft, die mir in Albuquerque zuteil wurde.

Herrn Prof. H. Walther bin ich sehr dankbar für die großzügige und außergewöhnliche Möglichkeit, im Rahmen meiner Promotion am Max-Planck-Institut für Quantenoptik anderthalb Jahre in den USA arbeiten zu können.

Herrn Prof. H. H. Wolter gilt mein Dank für die sehr intensiven Diskussionen über das Manuskript dieser Arbeit, die zu zahlreichen Verbesserungen führten.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Dr. W. Becker, der mich nicht nur in dieses Arbeitsgebiet einführte, sondern sich auch immer wieder allen Fragen und Diskussionen stellte und so die Entwicklung dieser Arbeit wesentlich beeinflusste.

Weiterhin haben zur Entwicklung dieser Arbeit zahlreiche Diskussionen mit Mitarbeitern und Gästen sowohl des Institute for Modern Optics in Albuquerque als auch des Max-Planck-Instituts für Quantenoptik in Garching beigetragen.

Den Damen E. Mahr und E. Kraus möchte ich meinen Dank aussprechen für das schnelle und sorgfältige Schreiben dieser Arbeit und Frau J. Pfister für das Anfertigen der Zeichnungen.

Mein allerherzlichster Dank geht außerdem an Lorene, die vor allem in der Endphase dieser Arbeit sehr viel Geduld für mich aufzubringen hatte, mich während aller Höhen und Tiefen voll unterstützte und so mit dazu beitrug, daß diese Arbeit noch unmittelbar vor unserer Hochzeit fertiggestellt wurde.

Biographische Daten

Name:	Rainer Rudolf Schlicher
Geburtsdatum:	27. September 1954
Geburtsort:	Saarbrücken
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Familienstand:	ledig
Anschrift:	Max-Planck-Institut für Quantenoptik D-8046 Garching bei München

Lebenslauf

- 1961 - 1965 Ostschule Saarbrücken
- 1965 - 1972 Staatliches Ludwigsgymnasium Saarbrücken
Abitur Juli 1972
- 1972 - 1974 Studium der Physik an der Universität des
Saarlandes in Saarbrücken
Diplom-Vorprüfung Oktober 1974
- 1974 - 1979 Studium der Physik an der
Ludwig-Maximilians-Universität München
Diplom-Hauptprüfung Februar 1980
- 1978 - 1979 Diplomarbeit in theoretischer Kernphysik
bei Prof. H. H. Wolter über
"Mechanismus der Streuung schwerer Ionen
nahe abgeschlossener Schalen"
- 1980 - 1981 Zivildienst bei der Gesellschaft für
Strahlen- und Umweltforschung (Neuherberg)
in der Abteilung Strahlenbiologie
- 1981 - 1984 Promotionsstudium der Physik an der
Ludwig-Maximilians-Universität München;
Doktorarbeit bei Prof. M. O. Scully und
Prof. H. Walther am Max-Planck-Institut
für Quantenoptik in Garching
- 1982 - 1983 Beurlaubung an das Institute for Modern Optics,
University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico, USA
(Februar 1982 - Juli 1983)

